5

ANALÝZA ROZPTYLU

Vzorová úloha 5.1 *Zkrácený postup jednofaktorové analýzy rozptylu*

Na úloze **B5.02** *Porovnání nové metody v sedmi laboratořích* ukážeme postup jednofaktorové analýzy rozptylu. Kirchhoefer[16] navrhl poloautomatickou metodu na stanovení maleátu chlorfeniraminu v tabletách. Sedm laboratoří A1 až A7 (faktor *A*) opakovalo analýzu tablety o obsahu 4 mg této látky celkem 10krát. Cílem je posoudit vliv laboratoří na výsledek analýzy.

Řešení:

1. Průměry a efekty úrovní: je proveden výpočet parametrů sloupcových průměrů $\hat{\mu}_i$, celkového průměru $\hat{\mu}$, sloupcových efektů $\hat{\alpha}_i$, reziduí $\hat{e}_{ij}$, (ADSTAT).

Počet sloupců, *K*	=	7
Počet dat, *N*	=	70
Celkový průměr $\hat{\mu}$	=	3.9846
Reziduální rozptyl s^2	=	3.6730

Úroveň faktoru *A*	**Sloupcový průměr** $\hat{\mu}$	**Efekt** α_i
1	4.0620	0.077429
2	3.9970	0.012429
3	4.0030	0.018429
4	3.9200	-0.04571
5	3.9570	-0.07571
6	3.9550	-0.09571
7	3.9980	0.013429

2. Tabulka ANOVA: je sestavena tabulka ANOVA (ADSTAT) a proveden *F*-test významnosti faktoru *A*. Jelikož Fisherovo-Snedecorovo testační kritérium $F_e = 5.660$ nabývá vyšší hodnoty než kvantil $F_{1-0.05}(7-1, 70-7) = 2.246$, je nulová hypotéza H_0: *Efekty faktoru A jsou nulové* zamítnuta a faktor *A* je statisticky významný.

H_0: Efekty faktoru *A* jsou nulové, **H_A:** ... nejsou nulové

Kvantil *F*(1-alfa, *K-1, N-K*) = 2.246

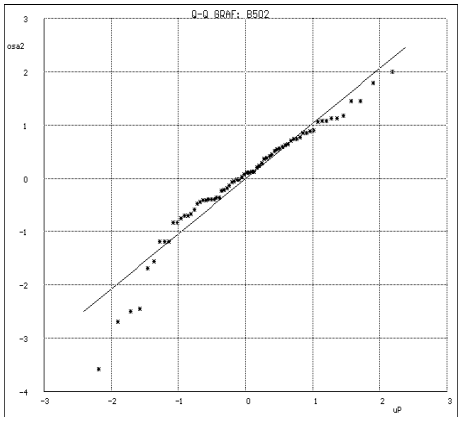
Zdroj rozptylu	**Stupně volnosti**	**Součet čtverců**	**Průměrný čtverec**	**Testační kritérium**	**Závěr H_0 je**	**Spočtená hlad. výz.**
Mezi úrovněmi *K*-1	= 6	0.12474	0.020790	5.660	Zamítnuta	0.000

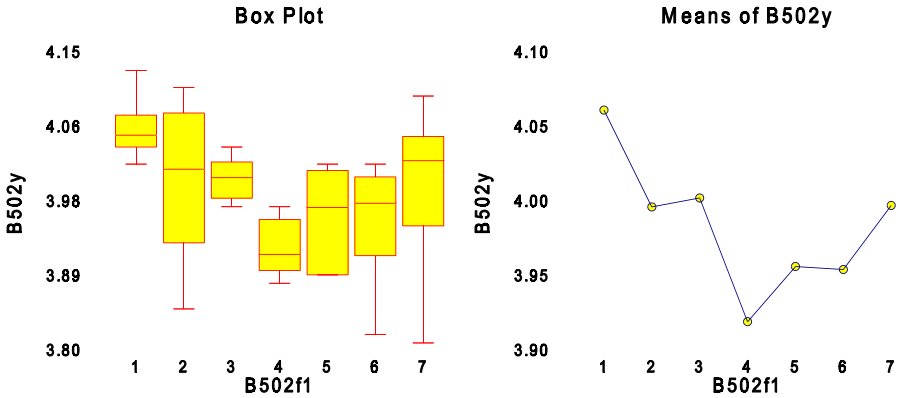
Rezidua *N-K*	= 63	0.23140	0.0036730
Celkový *N*-1	= 69	0.35614	0.0051614

3. Vícenásobné porovnávání Schéffeho procedurou (ADSTAT): jsou testovány lineární kontrasty pro zadané kombinace úrovní, H_0: μ_i - μ_j = 0, Schefféhо metodou mnohonásobného porovnávání. Tři dvojice úrovní faktoru *A*, a to P1=P4, P1=P5, P1=P6, vycházejí odlišně od ostatních, totiž nerovnají se sobě. Ostatní úrovně jsou, co do hodnoty, považovány za shodné.

Hypotéza H_0	**Průměrný párový rozdíl**	**Meze konfidenčního intervalu**		**Hypotéza H_0 je**
		dolní	**horní**	
P1 = P2	0.065	-0.035	0.165	Akceptována
P1 = P3	0.059	-0.041	0.159	Akceptována
P1 = P4	0.142	0.042	0.242	Zamítnuta
P1 = P5	0.105	0.005	0.205	Zamítnuta
P1 = P6	0.107	0.007	0.207	Zamítnuta
P1 = P7	0.064	-0.036	0.164	Akceptována
P2 = P3	-0.006	-0.106	0.094	Akceptována
P2 = P4	0.077	-0.023	0.177	Akceptována
P2 = P5	0.040	-0.060	0.140	Akceptována
P2 = P6	0.042	-0.058	0.142	Akceptována
P2 = P7	-0.001	-0.101	0.099	Akceptována
P3 = P4	0.083	-0.017	0.183	Akceptována
P3 = P5	0.046	-0.054	0.146	Akceptována
P3 = P6	0.048	-0.052	0.148	Akceptována
P3 = P7	0.005	-0.095	0.105	Akceptována
P4 = P5	-0.037	-0.137	0.063	Akceptována
P4 = P6	-0.035	-0.135	0.065	Akceptována
P4 = P7	-0.078	-0.178	0.022	Akceptována
P5 = P6	0.002	-0.098	0.102	Akceptována
P5 = P7	-0.041	-0.141	0.059	Akceptována
P6 = P7	-0.043	-0.143	0.057	Akceptována

4. Grafy a diagramy: je konstruován rankitový graf Jackknife reziduí. Rankitový graf dokazuje, že většina reziduí odpovídá předpokladu normality. V dolní části grafu je několik odlehlých hodnot, zbytek dobře splňuje lineární závislost. Zobrazení průměru analyzovaných dat umožňuje sledovat tvary závislosti.





Obr. 5.1 Jednofaktorová analýza rozptylu v úloze B502: rankitový graf reziduí, *ADSTAT* (nahoře), krabicový graf úrovní faktoru *A* (vlevo dole), diagram sloupcových průměrů *NCSS2000* (vpravo dole).

Vzorová úloha 5.2 *Podrobný postup v jednofaktorové analýze rozptylu*

Na vzorové úloze **H5.11** *Vliv tavby na obsah mědi v bronzu* ukážeme podrobný postup jednofaktorové analýzy rozptylu a především rozličné metody vícenásobného porovná-ní faktoru *A*. Bylo zkoumáno, zda se obsah mědi v bronzu mění od tavby k tavbě. U každé tavby byly odebrány 4 vzorky a stanoven procentuální obsah mědi v bronzu. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ vyšetřete, zda existuje vliv tavby (faktor *A*) na obsah mědi v bronzu. Ověřte rovněž výběrové předpoklady vhodnou grafickou a numerickou metodou.

Řešení:

1. Průměry a efekty úrovní: je proveden výpočet odhadů sloupcových průměrů $\hat{\mu}_i$, celkového průměru $\hat{\mu}$, sloupcových efektů $\hat{\alpha}_i$ a reziduí $\hat{e}_{ij}$, (NCSS2000).

Zdroj	**Počet**	**Průměr**	**Efekt**
Vše	20	87	
A: H511f1			
1	4	81.25	-5.75
2	4	88.5	1.50

3	4	86.25	-0.75
4	4	90.25	3.25
5	4	88.75	1.75

Zdroj: návěští řádku. **Počet:** četnost pozorování pro výpočet průměru. **Průměr:** hodnota aritmetického průměru. **Efekt:** velikost komponenty, kterou tento člen přispívá do průměru. **Graf průměrů:** vizuálně lze vyšetřit jednotlivé sloupce krabicovým grafem, který vyšetří symetrii, přítomnost odlehlých bodů, obecnou shodu středních hodnot a shodu rozptylů (obr. 5.2b).

2. Testy předpokladů o výběru: tři testy umožnují otestovat šikmost, špičatost a celkovou normalitu dat. Jestliže některý z nich zamítne hypotézu o normalitě, data nemohou být považována za normální, gaussovská.

Testy výběrových předpokladů:	**Testační**	**Spočtená**	**Závěr testu (0.05)**
Předpoklad	**kritérium**	**hlad. význ.**	**H_0 je**
Test šikmosti reziduí	-1.1439	0.252672	Přijata
Test špičatosti reziduí	-0.9800	0.327102	Přijata
Omnibus test reziduí	2.2688	0.321614	Přijata
Modifikovaný Levenův test stejných rozptylů	0.0765	0.988310	Přijata

Výsledky tří testů normality a jednoho testu homoskedasticity. ANOVA totiž předpokládá, že rezidua, odchylky od skupinových průměrů vykazují normální rozdělení. Testy nezávislosti prvků ve výběru a náhodnosti prvků ve výběru se zde neprovádějí. Obě vlastnosti by měly být ošetřeny v experimentálním postupu. Testy normality jsou provedeny na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Protože žádný z testů *nezamítl* nulovou hypotézu H_0 o normalitě, můžeme být přesvědčeni, že normalita je prokázána. Síla testu je ovlivněna velikostí výběru: malé výběry vykazují normalitu zřídka. Jsou vyšetřována dvě kritéria normality, šikmost a špičatost. Jestliže se normalita reziduí neprokáže kvůli šikmosti, mohla by se užít mocninová nebo logaritmická transformace k normování dat. V případě nenormality se použije Kruskalův-Wallisův neparametrický test. Základní předpoklady o nezávislosti výběru, spojité náhodné proměnné o měřicí stupnici se musí ovšem dodržet. Tento test má další předpoklady, že rozdělení sloupců jsou stejná (i když nemusí být normální) co do formy a tvaru a mohou se lišit pouze v parametru místa. **Test homoskedasticity** (modifikovaný Levenův test[17]): test byl shledán jedním z nejlepších testů shody rozptylů-homoskedasticity. Test ukazuje, že sloupce mají shodné rozptyly.

3. ANOVA tabulka: je proveden *F*-test významnosti efektů faktoru *A*. Jelikož nabývá Fisherovo-Snedecorovo testační kritérium $F_e = 5.988$ vyšší hodnoty než kvantil $F(1\text{-}0.05, 7\text{-}1, 70\text{-}7) = 3.056$, je nulová hypotéza H_0: *"Efekty faktoru A jsou nulové"* zamítnuta a faktor *A* se uvažuje jako statisticky významný.

NCSS2000:						
Zdroj		**Suma**	**Průměrný**		**Spočtená**	**Síla testu**
rozptylu	**SV**	**čtverců**	**čtverec**	**F-test**	**hlad. význ.**	**(α=0.05)**
A: H511f1	4	198.00	49.500	5.99	0.004374*	0.93514
S(A)	15	124.00	8.266666			
Total (Adjust.)	19	322.00				
* Faktor je významný při α = 0.05						

Zdroj rozptylu: obsahuje sloupce zdroje proměnlivosti v ANOVA modelu. **Suma čtverců:** suma čtverců odchylek se uvádí spíše pro úplnost této tabulky než pro přímé využití s vysvětlením. **Průměrný čtverec:** průměrný čtverec představuje sumu čtverců odchylek dělenou počtem stupňů volnosti. ***F*-test:** Fisherovo-Snedecorovo testační kritérium $F_e = 5.99$ je vyšší než kvantil $F(1\text{-}0.05, 7\text{-}1, 70\text{-}7) = 3.056$, a proto je nulová hypotéza H_0 "*Efekty faktoru A jsou nulové"* zamítnuta a faktor *A* se považuje za statisticky významný. **Spočtená hladina významnosti:** pro *F*-kritérium 0.004374 je menší než $\alpha = 0.05$, a proto je nulová hypotéza zamítnuta a *F*-kritérium, a tím pádem i faktor *A*, statisticky významné. **Síla testu** je pravděpodobnost zamítnutí hypotézy "o stejných průměrech", když průměry ve skutečnosti nejsou stejné. Je rovna 1 minus pravděpodobnost chyby typu II, čili β. Síla testu závisí na velikosti výběru, velikosti rozptylu, hladině významnosti α a skutečném rozdílu průměrů. Vysoká hodnota síly testu je žádoucí. Vysoká hodnota znamená vysokou pravděpodobnost zamítnutí nulové hypotézy, když nulová hypotéza je nesprávná. Je to vlastně kritická míra přesnosti testování hypotézy. Obecně bychom měli uvažovat sílu testu vždy,

když přijmeme nulovou hypotézu. Když přijmeme nulovou hypotézu s velkou silou testu, není dále co řešit. Přinejmenším víme, že průměry *nejsou* různé. Když však přijmeme nulovou hypotézu s malou silou testu, je před námi jedna z následujících možných voleb:

1. Zvýšíme hladinu významnosti α. Např. zvýšíme α z hodnoty 0.01 na 0.05 a toto zvýšení způsobí i nárůst síly testu.
2. Zvýšíme velikost výběru, což opět způsobí nárůst síly testu. Je-li však síla testu veliká, zvětšení výběru má malý vliv na sílu testu.
3. Snížíme velikost rozptylu. Můžeme např. předělat strategii experimentu a získat tak přesnější měření, hodnoty bez okrajových hodnot a s menším rozptylem.

4. Rozličné metody vícenásobné porovnávání: jsou testovány lineární kontrasty pro zadané kombinace úrovní, H_0: $\mu_i - \mu_j = 0$.

Následující metody vícenásobného porovnávání mají stejný výstup: **Alfa:** značí zvolenou hladinu významnosti. **ST:** stupně volnosti. **MSE:** hodnota průměrného čtverce chyb. **Kritická hodnota:** tabulkový kvantil pro dané stuně volnosti a hladinu významnosti. **Sloupec** čili úrovně faktoru *A*. **Počet:** četnost pozorování v průměru. **Průměr:** hodnota aritmentického průměru. **Liší se od sloupců:** seznam sloupců, které se liší od dotyčného testovaného sloupce, nadepsaného v tomto řádku. Všechny sloupce zde nevyjmenované jsou statisticky nevýznamně odlišné od dotyčného sloupce, nadepsaného v řádku.

A. Bonferroniho porovnání všech párů: test má odhalit, které páry se liší.

Odezva: H511y, **Faktor *A*:** H511f1, **Alfa**=0.050, **SV**=15 **MSE**=8.267, **Kritická hodnota**=3.286,

Sloupec	**Počet**	**Průměr**	**Liší se od sloupců**
1	4	81.25	2, 5, 4
3	4	86.25	
2	4	88.5	1
5	4	88.75	1
4	4	90.25	1

Test ukazuje, že tři páry úrovní faktoru *A*, a to 1. sloupec a 2. sloupec, 1. sloupec a 4. sloupec, a 1. sloupec a 5. sloupec vycházejí statisticky významně odlišné. Ostatní sloupce jsou považovány za shodné.

B. Bonferroniho porovnání sloupců vůči kontrolnímu: jestliže jeden sloupec bude představovat *kontrolní sloupec* a všechny ostatní sloupce budeme porovnávat s tímto kontrolním, půjde o *K*-1 porovnání.

Odezva: H511y, **Faktor *A*:** H511f1, **Alfa**=0.050, **SV**=15 **MSE**=8.267, **Kritická hodnota**=2.837,

Sloupec	**Počet**	**Průměr**	**Liší se od sloupců**
1	4	81.25	2, 5, 4
3	4	86.25	
2	4	88.5	1
5	4	88.75	1
4	4	90.25	1

Bylo dosaženo podobného závěru jako u předešlého testu, tři páry úrovní faktoru *A*, a to 1. a 2. sloupec, 1. a 4., a 1. a 5. sloupec vycházejí statisticky významně odlišné.

C. Standardní porovnání: test významnosti plánovaného porovnání:

(a) Porovnání 1. sloupce se všemi ostatními vyššími, tj. s 2., 3., 4. a 5. sloupcem:

Plánované porovnání: A1 (-4, 1, 1, 1, 1,)

Odezva: H511y, **Faktor *A*:** H511f1, **Alfa**=0.050, **SV**=15, **MSE**=8.267, **Porovnávaná hodnota**=28.75, **t-test**=4.472, **Prob>|t|**=0.00045, **Závěr testu(0.05)**= Zamítnuto, **Standardní chyba porovnávané hodnoty**=6.429,

Váhový

Sloupec	koeficient	Počet	Průměr
1	-4	4	81.25
2	1	4	88.5
3	1	4	86.25
4	1	4	90.25
5	1	4	88.75

Vedle vysvětlených pojmů jsou zde ještě: **Porovnávaná hodnota:** vznikne násobením porovnávacího koeficientu (Váhový koeficient) svým sloupcovým průměrem a následujícím součtem přes všechny sloupce. ***t*-test:** testuje, zda se porovnávaná hodnota významně liší od nuly. **Prob , *t*** je spočtená hladina významnosti **Prob**, která by měla být nad kritickou hodnotou: je-li **Prob** menší než zadaná hladina významnosti α, je porovnávaná hodnota statisticky významná. **Závěr testu (0.05):** rozhodnutí na základě zadané hodnoty α. **Standardní chyba porovnávané hodnoty:** standardní chyby vyčíslované porovnávané hodnoty. Tvoří jmenovatele v testované statistice *t*-testu. **Váhový koeficient:** váhový koeficient pro tento sloupec. Porovnáním 1. sloupcového průměru se všemi ostatními vyššími 2., 3., 4., a 5. byla zamítnuta nulová hypotéza o shodnosti těchto sloupcových průměrů, protože **Závěr testu(0.05)** přináší závěr - Zamítnuto.

(b) Porovnání 2. sloupce se všemi ostatními vyššími, tj. s 3., 4. a 5. sloupcem:

Plánované porovnání A2 (0, -3, 1, 1, 1,)
Odezva: H511y, **Faktor *A*:** H511f1, **Alfa**=0.050, **SV**=15 **MSE**=8.267, **Porovnávaná hodnota**=-0.25, **t-test**=0.0502, **Prob>|t|**=0.961, **Závěr testu(0.05)**=Přijato, **Standardní chyba porovnávané hodnoty**=4.980,

Sloupec	Váhový koeficient	Počet	Průměr
1	0	4	81.25
2	-3	4	88.5
3	1	4	86.25
4	1	4	90.25
5	1	4	88.75

Porovnáním 2. sloupcového průměru se všemi ostatními vyššími 3., 4., a 5. byla přijata nulová hypotéza o shodnosti těchto sloupcových průměrů, protože **Závěr testu(0.05)** přináší závěr - Přijato.

(c) Porovnání 3. sloupce se všemi ostatními vyššími, tj. s 4. a 5. sloupcem:

Plánované porovnávání: A3 (0, 0, -2, 1, 1)
Odezva: H511y, **Faktor *A*:** H511f1, **Alfa**=0.050, **SV**=15, **MSE**=8.267, **Porovnávaná hodnota**=6.5, **t-test**=1.846, **Prob>|t|**=0.0847, **Závěr testu(0.05)**=Přijato, **Standardní chyba porovnávané hodnoty**=3.521,

Sloupec	Váhový koeficient	Počet	Průměr
1	0	4	81.25
2	0	4	88.5
3	-2	4	86.25
4	1	4	90.25
5	1	4	88.75

Porovnáním 3. sloupcového průměru se všemi ostatními vyššími 4., a 5. byla přijata nulová hypotéza o shodnosti těchto sloupcových průměrů, protože **Závěr testu(0.05)** přináší závěr - Přijato.

(d) Porovnání 4. sloupce se všemi ostatními vyššími, tj. s 5. sloupcem:

Plánované porovnání: A4 (0, 0, 0, -1, 1)
Odezva: H511y, **Faktor *A*:** H511f1, **Alfa**=0.050, **SV**=15, **MSE**=8.267, **Porovnávaná hodnota**=-1.5,

t-test=0.738, **Prob>|t|**=0.472, **Závěr testu(0.05)**=Přijato, **Standardní chyba porovnávané hodnoty**=2.033,

Sloupec	Váhový koeficient	Počet	Průměr
1	0	4	81.25
2	0	4	88.5
3	0	4	86.25
4	-1	4	90.25
5	1	4	88.75

Porovnáním 4. sloupcového průměru se všemi ostatními vyššími, tj. s 5., byla přijata nulová hypotéza o shodnosti těchto sloupcových průměrů, protože **Závěr testu(0.05)** přináší závěr - Přijato.

D. Vícenásobné porovnávání Schéffeho procedurou: jsou testovány lineární kontrasty pro zadané kombinace úrovní, H_0: $\mu_i - \mu_j = 0$, Schefféhо metodou mnohonásobného porovnávání (ADSTAT).

NCSS2000: Scheffeho vícenásobné porovnávání

Odezva: H511y, **Faktor *A*:** H511f1, **Alfa**=0.050, **SV**=15, **MSE**=8.267, **Kritická hodnota**=3.496,

Sloupec	Počet	Průměr	Liší se od sloupců
1	4	81.25	2, 5, 4
3	4	86.25	
2	4	88.5	1
5	4	88.75	1
4	4	90.25	1

Bylo dosaženo podobného závěru jako u Bonferroniho testu, tři páry úrovní faktoru *A* dává 1. a 2. sloupec, 1. a 4., a 1. a 5. sloupec vycházejí statisticky významně odlišné.

ADSTAT: Scheffeho vícenásobné porovnávání

Hypotéza H_0	Průměrný párový rozdíl	Meze konfidenčního intervalu dolní	horní	Závěr
P1=P2	-7.250	-14.358	-0.142	Zamítnuta
P1=P3	-5.000	-12.108	2.108	Akceptována
P1=P4	-9.000	-16.108	-1.892	Zamítnuta
P1=P5	-7.500	-14.608	-0.392	Zamítnuta
P2=P3	2.250	-4.858	9.358	Akceptována
P2=P4	-1.750	-8.858	5.358	Akceptována
P2=P5	-0.250	-7.358	6.858	Akceptována
P3=P4	-4.000	-11.108	3.108	Akceptována
P3=P5	-2.500	-9.608	4.608	Akceptována
P4=P5	1.500	-5.608	8.608	Akceptována

Tři páry úrovní faktoru *A* P1=P2, P1=P4, P1=P5 vycházejí odlišně od ostatních, jsou totiž statisticky významně odlišné. Ostatní sloupce jsou považovány za shodné.

E. Kruskalovo-Wallisovo vícenásobné porovnávání pořadí: test je neparametrickou náhražkou jednofaktorové analýzy rozptylu, když předpoklad normality není splněn. Jsou-li navíc vnitřní vazby v datech, musíme užít korigovanou verzi tohoto testu.

Kruskalovo-Wallisovo vícenásobné porovnávání pořadí:

Hypotézy: H_0**:** Všechny mediány jsou stejné.

H_A**:** Přinejmenším dva mediány jsou vzájemně odlišné.

Metoda	SV	χ^2 (H)	Spočtená hlad. významnosti	Závěr testu(0.05)

Nekorigované na vazby	4	10.45357	0.033443	Zamítnuta H_0
Korigované na vazby	4	10.54075	0.032240	Zamítnuta H_0
Počet vázaných hodnot	5			
Korekční faktor	66			

Sloupec	**Počet**	**Suma pořadí**	**Průměrné pořadí**	**Z-skóre**	**Medián**
1	4	12.00	3.00	-2.8347	82
2	4	50.50	12.63	0.8032	89
3	4	35.00	8.75	-0.6614	87
4	4	60.50	15.13	1.7481	90.5
5	4	52.00	13.00	0.9449	89

Hypotézy: jsou naformulovány dvě hypotézy. Nulová hypotéza říká H_0: "*Mediány všech sloupců jsou stejné*" proti alternativní H_A: "*Alespoň jeden medián se liší od ostatních*". **Metoda:** jsou prezentovány výsledky dvou testů: *první* je Kruskalův-Wallisův test bez korekcí na vnitřní vazby, čili stejná pořadí, a *druhý* je s korekcí na vnitřní vazby. Nejsou-li žádné vazby, žádná stejná pořadí jsou výsledky obou testů stejné. **SV:** stupně volnosti velkého výběru χ^2-aproximace rozdělením Kruskalova-Wallisova testu. Všimněme si, že počet stupňů volnosti je roven počtu sloupců (úrovní faktoru) minus 1. **χ^2(H):** hodnota testačního kritéria *H*, nekorigovaného Kruskalova-Wallisova testu se vyčíslí dle vzorce

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

a týž test, korigovaný na případ stejných pořadí, se vyčíslí dle téhož *H*, děleného korekčním faktorem dle

$$H_C = H \Big/ \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{K} t_i(t_i^2 - 1)}{N(N^2 - 1)} \right] .$$

V obou vzorcích je *N* celkový počet prvků, n_i je počet prvků v *i*-tém sloupci, *K* je počet sloupců (úrovní faktoru *A*), R_i je suma pořadí *i*-tého sloupce a *t* je počet odpovídajících stejných pořadí. **Spočtená hladina významnosti:** o tom, že kritérium *H* nabývá χ^2 rozdělení. Pravděpodobnost kritéria *H* je větší než pravděpo-dobnost získaná touto analýzou, např. testovat na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ znamená, že tato pravděpodobnost by měla být menší než 0.05, aby bylo *H* významné. **Závěr testu (0.05):** rozhodnutí o nulové hypotéze na bázi tohoto testu. **Počet souborů vázaných hodnot:** nejsou-li žádné vazby, čili jsou stejná pořadí, je toto číslo rovno nule. **Korekční faktor:** jde o část korekčního faktoru, který je roven *H* u kritéria $\sum_{i=1}^{k} t_i(t_i^2 - 1)$.

F. Kruskalův-Wallisův test vícenásobného porovnání pomocí *Z*-skóre: hodnoty *Z*-skóre (*standardizovaná veličina*, kdy od prvků sloupce je odečten sloupcový průměr a pak jsou vyděleny směrodatnou odchylkou) jsou testovány, zda mediány libovolných dvou sloupců jsou významně rozdílné: jde o *Z* skóre, které bylo upraveno pro vícenásobný test tak, že α/2 je dělena hodnotou *K(K*-1*)/*2, a výsledkem je $z_{\alpha/K(K-1)}$. Zde *K(K*+1*)* představuje počet možných párů všech *K* sloupců. Když ale provedeme omezený počet testování *m*, menší než je celkový počet sloupců, vydělíme α/2 pouze číslem *m*.

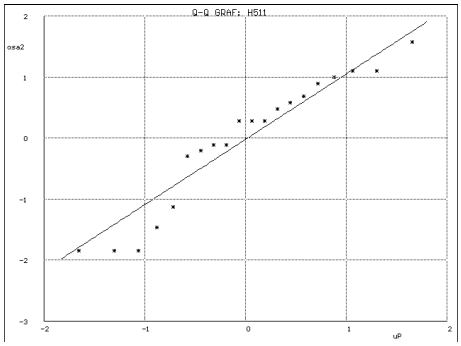
Kruskalův-Wallisův test vícenásobného porovnání pomocí *Z*-skóre

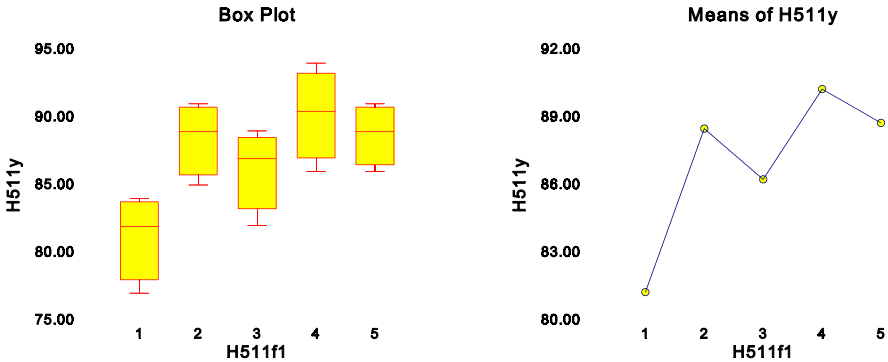
H511y	1	2	3	4	5
1	0.0000	2.3104	1.3802	2.9105	2.4004
2	2.3104	0.0000	0.9302	0.6001	0.0900
3	1.3802	0.9302	0.0000	1.5303	1.0202
4	2.9105	0.6001	1.5303	0.0000	0.5101
5	2.4004	0.0900	1.0202	0.5101	0.0000

Vlastní test: mediány se významně liší, je-li *Z*-skóre > 1.9600
Bonferroniho test: mediány se významně liší, je-li *Z*-skóre > 2.8070

Porovnáním každého s každým plyne, že hodnoty testačního kritéria z_{ij} vyšší než kritická hodnota značí, že sloupcové průměry jsou statisticky významně odlišné.

5. Grafy a diagramy:





Obr. 5.2 Jednofaktorová analýza rozptylu v úloze H511: rankitový graf reziduí, *ADSTAT* (nahoře), krabicový graf úrovní faktoru A (vlevo dole), diagram sloupcových průměrů *NCSS2000* (vpravo dole).

Vzorová úloha 5.3 *Dvoufaktorová analýza rozptylu bez opakovaní*

Úloha **H5.02** *Vliv druhu svářecího kovu na pevnost svaru.* Vazebným pojítkem svaru zirkoniové slitiny bývá nikl, železo a měď. Byly vytvořeny svary se třemi typy svářecích drátů a cílem je vyšetřit pevnost svaru, tzn. největší tlak v tisících liber na čtvereční palec, nutný k přerušení svaru. Na hladině významnosti α = 0.05 vyšetřete, zda záleží na druhu kovu (faktor *A* značený *H502F1*) ve svářecím drátu nebo na sedmi rozličných svárech (faktor *B* značený *H502F2*), zda tlaky k přerušení rozličných svarů jsou u všech drátů stejné. Prozkoumejte, zda je třeba provést transformaci vedoucí ke stabilizaci rozptylu.

Řešení:

1. Průměry a efekty úrovní: jsou vypočteny odhady celkového průměru $\hat{\mu}$, řádkových efektů $\hat{\alpha}_i$, sloupcových efektů $\hat{\beta}_j$, interakčního členu $\hat{\tau}_{ij}$ a konstanty *C*.

Průměry a efekty (NCSS2000):

Zdroj	Počet	Průměr	Efekt
Vše	21	72.39524	72.39524

A*: *H502f1			
1	7	71.1	-1.295238
2	7	75.9	3.504762
3	7	70.18571	-2.209524
B*: *H502f2			
1	3	70.36667	-2.028571
2	3	67.56667	-4.828571
3	3	77.7	5.304762
4	3	72.7	0.3047619
5	3	73.5	1.104762
6	3	68.43333	-3.961905
7	3	76.5	4.104762
AB*: *H502f1, H502f2			
1,1	1	67	-2.071429
1,2	1	67.5	1.228571
1,3	1	76	-0.4047619
1,4	1	72.7	1.295238
1,5	1	73.1	0.8952381
1,6	1	65.8	-1.338095
1,7	1	75.6	0.3952381
2,1	1	71.9	-1.971429
2,2	1	68.8	-2.271429
2,3	1	82.6	1.395238
2,4	1	78.1	1.895238
2,5	1	74.2	-2.804762
2,6	1	70.8	-1.138095
2,7	1	84.9	4.895238
3,1	1	72.2	4.042857
3,2	1	66.4	1.042857
3,3	1	74.5	-0.9904762
3,4	1	67.3	-3.190476
3,5	1	73.2	1.909524
3,6	1	68.7	2.476191
3,7	1	69	-5.290476

2. Tabulka ANOVA: je sestavena tabulka ANOVA a provedeny *F*-testy významnosti faktorů, resp. interakcí, včetně kombinovaných testů k ověření celkové významnosti faktorů *A* a *B*.

ANOVA MODEL I: Očekávaná suma čtverců pro vyvážená data (NCSS2000):

Zdroj rozptylu	**SV**	**Faktor pevný?**	**Faktor ve jmenovateli**	**Očekávaná suma čtverců**
A: *H502f1*	2	Ne	S	S+bsA
B: *H502f2*	6	Ano	*AB*	S+sAB+asB
AB	12	Ne	S	S+sAB
S	0	Ne		S

ANOVA tabulka:

Zdroj rozptylu	SV	Suma čtverců	Průměrný čtverec	F-test	Spočtená hladina významnosti	Síla (α = 0.05)
A: *H502f1*	2	131.901	65.95048			
B: *H502f2*	6	268.2895	44.71492	4.31	0.015087*	0.822970
AB	12	124.459	10.37159			
S	0	0				
Total (Adjust.)	20	524.6495				
Total	21					

* Faktor je významný při α = 0.05

ANOVA model I: jelikož hodnota testačního kritéria 4.31 je vyšší než kvantil Fisherova-Snedecorova rozdělení 3.095, je nulová hypotéza o nevýznamnosti faktoru *A* (druh sváru) zamítnuta a druh svaru je statisticky významným faktorem.

ANOVA MODEL II: Očekávaná suma čtverců pro vyvážená data (NCSS2000)

Zdroj rozptylu	SV	Faktor pevný?	Faktor ve jmenovateli	Očekávaná suma čtverců
A: *H502f1*	2	Ne	*AB*	*S+sAB+bsA*
B: *H502f2*	6	Ne	*AB*	*S+sAB+asB*
AB	12	Ne	*S*	*S+sAB*
S	0	Ne	*S*	

ANOVA tabulka:

Zdroj rozptylu	SV	Suma čtverců	Průměrný čtverec	*F*-test	Spočtená hladina významnosti	Síla (α = 0.05)
A: *H502f1*	2	131.901	65.95048	6.36	0.013094*	
B: *H502f2*	6	268.2895	44.71492	4.31	0.015087*	
AB	12	124.459	10.37159	3.49		
S	0	0				
Total (Adjust.)	20	524.6495				
Total	21					

*Faktor je významný při α = 0.05

ANOVA model II: jelikož je hodnota druhého testačního kritéria 6.36 vyšší než kvantil Fisherova-Snedecorova rozdělení 3.982, je nulová hypotéza o nevýznamnosti faktoru *B* (druh kovu svářecího drátu) zamítnuta a tento kov je statisticky významným faktorem. Interakce má fyzikální význam, a proto ji budeme testovat: jelikož hodnota testačního kritéria 3.493 je nižší než kvantil Fisherova-Snedecorova rozdělení 4.844, je nulová hypotéza o nevýznamnosti interakčního členu *AB* (interakce druhu sváru s kovem svářecího drátu) přijata a interakce je statisticky nevýznamná. Jelikož odhad mocninné transformace -10.086 leží v akceptovatelném intervalu -15.766 až -4.4066, není třeba data transformovat mocninnou nebo Boxovu-Coxovou transformací.

Při porušení předpokladu o normalitě užijeme pořadový Friedmanův test.

Pořadí úrovní:

Úroveň faktoru *H502f2*	Počet bloků	Medián	Průměr pořadí	Suma pořadí
1	3	71.9	3.333333	10
2	3	67.5	1.666667	5
3	3	76	6.666667	20
4	3	72.7	3.666667	11
5	3	73.2	5	15
6	3	68.7	2	6

7	3	75.6	5.666667	17

Friedmanův test:

Vazby	Friedmanův test. kritérium (Q)	SV	Spočtená hladina významnosti α	Test dobré shody (W)
Ignorovány	13.428571	6	0.036713	0.746032
Uvažovány	13.428571	6	0.036713	0.746032
Multiplicita	0			

Poznámka: i když vyšel vliv faktoru *A* jako statisticky významný, demonstrujeme si další postup za předpokladu jeho znáhodnění.

Úroveň faktoru *B*: drženého jako pevný nebo náhodný faktor. **Počet bloků:** počet řádků náhodného faktoru *A*. **Medián:** hodnota mediánu pro odpovídající řádek. **Průměr pořadí:** průměr pořadí pro tuto hladinu faktoru. **Suma pořadí:** suma pořadí pro tuto hladinu pořadí. **Vazby:** vazby. **Ignorovány:** statistiky řádku pro neuvažované vazby. **Uvažovány:** statistiky řádku pro uvažované vazby. **Friedmanův test (Q):** hodnota Friedmanovy testační statistiky *Q*. **SV:** *K*-1 stupňů volnosti. **Spočtená hladina významnosti α:** pro testační kritérium *Q*. Je-li hodnota *menší* než zadané α = 0.05, nulová hypotéza o stejných mediánech je zamítnuta. **Test dobré shody (W):** hodnota Kendallova koeficientu dobré shody je mírou shody mezi prvky výběru. Nabývá hodnot mezi 0 a 1. Je-li blízká 1, indikuje perfektní shodu. Nula indikuje naprostou neshodu. **Korekční faktor:** pro vazebné podmínky.

3. Rozličné metody vícenásobné porovnávání MCP: jsou testovány lineární kontrasty pro zadané kombinace úrovní, H_0: $\mu_i - \mu_j = 0$ pro ANOVA MODEL I.

Následující metody vícenásobného porovnávání mají vesměs stejný výstup: **Alfa:** značí zvolenou hladinu významnosti. **DF:** stupně volnosti. **MSE:** hodnota průměrného čtverce chyb. **Kritická hodnota:** tabulkový kvantil pro dané stuně volnosti a hladinu významnosti. **Sloupec:** sloupec čili úroveň faktoru *B* (značeného *H502F2*). **Počet:** počet pozorování ve sloupcovém průměru. **Průměr:** hodnota aritmetického průměru. **Liší se od sloupců:** seznam sloupců, které se liší od sloupce citovaného v dotyčném řádku. Všechny sloupce zde nevyjmenované jsou statisticky nevýznamně odlišné od dotyčného sloupce.

A. Bonferroniho porovnání všech párů: test má odhalit, které páry se liší.

Bonferroniho porovnání všech párů

Odezva: *H502y*, **Faktor *B*:** *H502f2*, **Alfa**=0.050, **SV**=12, **MSE**=10.372, **Kritická hodnota**=3.833,

Sloupec	Počet	Průměr	Liší se od sloupců
2	3	67.56667	3
6	3	68.43333	
1	3	70.36667	
4	3	72.7	
5	3	73.5	
7	3	76.5	
3	3	77.7	2

Test indikuje, že 2. a 3. sloupec faktoru *B* se statisticky významně odlišují.

B. Bonferroniho porovnání sloupců vůči kontrolnímu: jestliže jeden sloupec bude představovat *kontrolní sloupec* a všechny ostatní sloupce budeme porovnávat s kontrolním, půjde o *K*-1 porovnání.

Bonferroniho porovnání sloupců vůči kontrolnímu

Odezva: *H502y*, **Faktor *B*:** *H502f2*, **Alfa**=0.050, **SV**=12, **MSE**=10.372, **Kritická hodnota**=3.153,

Sloupec	Počet	Průměr	Liší se od sloupců

2	3	67.56667	7, 3
6	3	68.43333	3
1	3	70.36667	
4	3	72.7	
5	3	73.5	
7	3	76.5	2
3	3	77.7	2, 6

Test indikuje, že od 2. se liší 3. a 7. sloupec, od 6. se liší 3. sloupec.

C. Scheffeho vícenásobné porovnání:

Scheffeho vícenásobné porovnání

Odezva: *H502y*, **Faktor *B*:** *H502f2*, **Alfa**=0.050, **SV**=12, **MSE**=10.372, **Kritická hodnota**=4.240,

Sloupec	Počet	Průměr	Liší se od sloupců
2	3	67.56667	
6	3	68.43333	
1	3	70.36667	
4	3	72.7	
5	3	73.5	
7	3	76.5	
3	3	77.7	

Test neindikuje odlišné sloupce.

D. Plánované standardní porovnání: při plánovaném porovnání **B1** až **B6** se při standardní volbě porovnává vždy jeden konkrétní sloupec se všemi ostatními vyššími. U volby **B1** se porovnává pár 1. sloupce s 2., 3., 4., 5., 6. a 7. sloupcem, u volby **B2** pak pár 2. sloupce s 3., 4., 5., 6. a 7. sloupcem atd. Testování těchto všech párů sloupců pak tvoří celek nulové hypotézy, který může být přijat nebo zamítnut v návěští **Závěr testu(0.05).**

Plánované porovnání: B1

Odezva: *H502y*, **Faktor *B*:** *H502f2*, **Alfa**=0.050, **SV**=12, **MSE**=10.372, **Porovnávaná hodnota**=14.2, **t-test**=1.178, **Prob>|t|**=0.261, **Závěr testu(0.05)**=Přijato, **Standardní chyba porovnávané hodnoty**=12.050,

Sloupec	Váhový koeficient	Počet	Průměr
1	-6	3	70.36667
2	1	3	67.56667
3	1	3	77.7
4	1	3	72.7
5	1	3	73.5
6	1	3	68.43333
7	1	3	76.5

U volby **B1** je nulová hypotéza o shodnosti testovaných párů sloupcových průměrů *přijata*.

Plánované porovnání: B2

Odezva: *H502y*, **Faktor *B*:** *H502f2*, **Alfa**=0.050, **SV**=12, **MSE**=10.372, **Porovnávaná hodnota**=31, **t-test**=3.044, **Prob>|t|**=0.0102, **Závěr testu(0.05)**=Zamítnuto, **Standardní chyba porovnávané hodnoty**=10.184,

Sloupec	Váhový koeficient	Počet	Průměr
1	0	3	70.36667
2	-5	3	67.56667
3	1	3	77.7
4	1	3	72.7
5	1	3	73.5
6	1	3	68.43333
7	1	3	76.5

U volby **B2** je nulová hypotéza o shodnosti testovaných párů sloupcových průměrů *zamítnuta*.

Plánované porovnání: B3
Odezva: *H502y*, **Faktor *B*:** *H502f2*, **Alfa**=0.050, **SV**=12, **MSE**=10.372, **Porovnávaná hodnota**=-19.667, **t-test**=2.365, **Prob>|t|**=0.0357, **Závěr testu(0.05)**= Zamítnuto, **Standardní chyba porovnávané hodnoty**=8.315,

Sloupec	Váhový koeficient	Počet	Průměr
1	0	3	70.36667
2	0	3	67.56667
3	-4	3	77.7
4	1	3	72.7
5	1	3	73.5
6	1	3	68.43333
7	1	3	76.5

U volby **B3** je nulová hypotéza o shodnosti testovaných párů sloupcových průměrů *zamítnuta*.

Plánované porovnání: B4
Odezva: *H502y*, **Faktor *B*:** *H502f2*, **Alfa**=0.050, **SV**=12, **MSE**=10.372, **Porovnávaná hodnota**=0.333, **t-test**=0.0517, **Prob>|t|**=0.9596, **Závěr testu(0.05)**=Přijato, **Standardní chyba porovnávané hodnoty**=6.441,

Sloupec	Váhový koeficient	Počet	Průměr
1	0	3	70.36667
2	0	3	67.56667
3	0	3	77.7
4	-3	3	72.7
5	1	3	73.5
6	1	3	68.43333
7	1	3	76.5

U volby **B4** je nulová hypotéza o shodnosti testovaných párů sloupcových průměrů *přijata*.

Plánované porovnání: B5
Odezva: *H502y*, **Faktor *B*:** *H502f2*, **Alfa**=0.050, **SV**=12, **MSE**=10.372, **Porovnávaná hodnota**=-2.067, **t-test**=0.4537, **Prob>|t|**=0.658, **Závěr testu(0.05)**=Přijato, **Standardní chyba porovnávané hodnoty**=4.554,

Sloupec	Váhový koeficient	Počet	Průměr
1	0	3	70.36667
2	0	3	67.56667

3	0	3	77.7
4	0	3	72.7
5	-2	3	73.5
6	1	3	68.43333
7	1	3	76.5

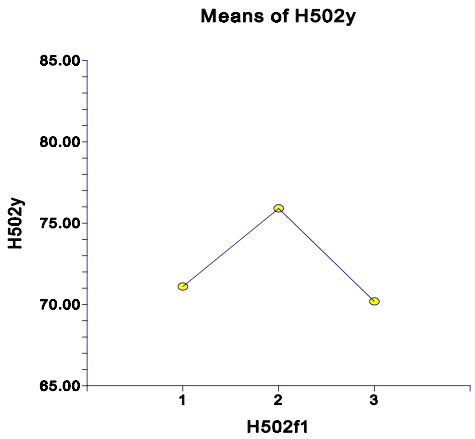
U volby **B5** je nulová hypotéza o shodnosti testovaných párů sloupcových průměrů *přijata.*

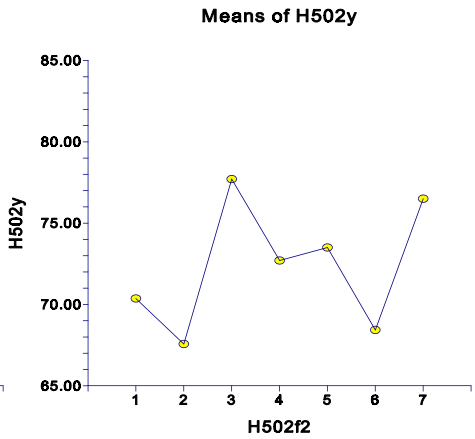
Plánované porovnání: B6
Odezva: *H502y*, **Faktor *B*:** *H502f2*, **Alfa**=0.050, **SV**=12, **MSE**=10.372, **Porovnávaná hodnota**=8.067, **t-test**=3.067, **Prob>|t|**=0.0098, **Závěr testu(0.05)**=Zamítnuto, **Standardní chyba porovnávané hodnoty**=2.630,

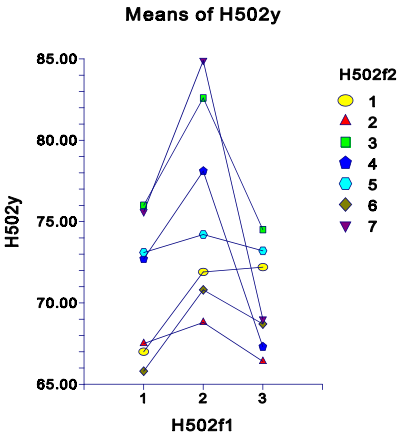
Sloupec	**Váhový koeficient**	**Počet**	**Průměr**
1	0	3	70.36667
2	0	3	67.56667
3	0	3	77.7
4	0	3	72.7
5	0	3	73.5
6	-1	3	68.43333
7	1	3	76.5

U volby **B6** je nulová hypotéza o shodnosti testovaných párů sloupcových průměrů *zamítnuta*.

4. Grafy a diagramy:







Obr. 5.3 Dvoufaktorová analýza rozptylu bez opakování v úloze H5.02:
Nahoře vlevo: Diagram průměrů pro rozličné úrovně faktoru *A* (tři různé kovy slitiny).
Nahoře vpravo: Diagram průměrů pro rozličné úrovně faktoru *B* (7 různých svarů).
Dole: Diagram průměrů pro rozličné úrovně obou faktorů *A* a *B*.

Vzorová úloha 5.4 *Vyvážená dvoufaktorová analýza rozptylu*

Na úloze **H5.21** *Vliv teploty výpalu a druhu keramické suroviny na ztrátu hmotnosti pálením* ukážeme aplikaci vyvážené dvoufaktorové analýzy rozptylu s pevnými efekty se stejným počtem pozorování. Při čtyřech teplotách A1 až A4 tj. 950 EC, 1000 EC, 1050 EC a 1100 E C (faktor *A*) byly vypalovány tři typy surovin B1 až B3 (faktor *B*). Na výpalcích bylo provedeno zjištění ztráty hmotnosti pálením v procentech. Stanovení ztráty hmotnosti bylo provedeno u všech tří surovin pro každou teplotu, a to třikrát $n = 3$. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ vyšetřete, zda má teplota výpalu A1 až A4 a typ suroviny B1 až B3 vliv na ztrátu hmotnosti pálením.

Řešení: Použijeme vyvážené dvoufaktorové analýzy rozptylu s pevnými efekty se stejným počtem pozorování ANOVA2B program ADSTAT pro hladinu významnosti $\alpha = 0.050$, počet úrovní faktoru *A*, $N = 4$, počet úrovní faktoru *B*, $M = 3$, počet opakování v jedné buňce $n = 3$.

1. Průměry a úrovně efektů:

Celkový průměr = 9.8833

Faktor *A*: *H521F1*			**Faktor *B*:** *H521F2*		
Úroveň	**Průměr**	**Efekt**	**Úroveň**	**Průměr**	**Efekt**
1	9.656	-0.2278	1	6.9500	-2.9333
2	9.822	-0.0611	2	10.450	0.5667
3	10.11	0.12778	3	12.250	2.3667
4	10.44	0.16111			

2. ANOVA tabulka pro model s interakcemi faktorů *A*, *B*:

H_0: Efekty faktoru *A* jsou nulové, **H_A:** ... nejsou nulové
Kvantil F(1-alfa, *N*-1, *M N*(*n*-1) = 3.009
H_0: Efekty faktoru *B* jsou nulové, **H_A:** ... nejsou nulové
Kvantil F(1-alfa, *M*-1, *M N*(*n*-1) = 3.403
H_0: Interakce I je nulová, **H_A:** ... není nulová, (zde I znamená efekty interakcí *A* a *B* dohromady)
Kvantil F(1-alfa, (*N*-1)(*M*-1), *N M*(*n*-1)) = 2.508

Zdroj rozptylu	**Stupně volnosti**	**Součet čtverců**	**Průměrný čtverec**	**Testační kritérium**	**Závěr H_0 je**	**Spočtená hlad. výz.**

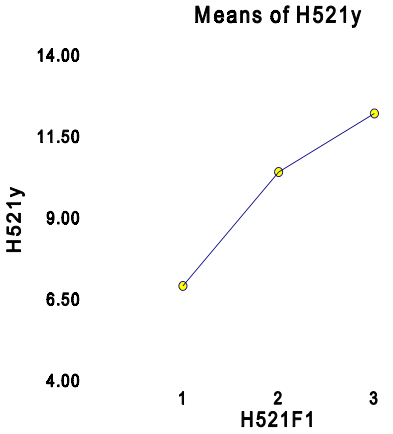
Mezi úrovněmi A, N-1	= 3	0.8811	0.2937	0.405	Přijata	0.751
Mezi úrovněmi B, M-1	= 2	174.32	87.160	120.175	Zamítnuta	0.000
Interakce (N-1)(M-1)	= 6	0.2222	0.0370	0.051	Přijata	0.999
Rezidua $M\,N(n$-1)	= 18	17.407	0.7253			
Celkový $(M\,N\,n$-1)	= 35	192.83	5.5094			

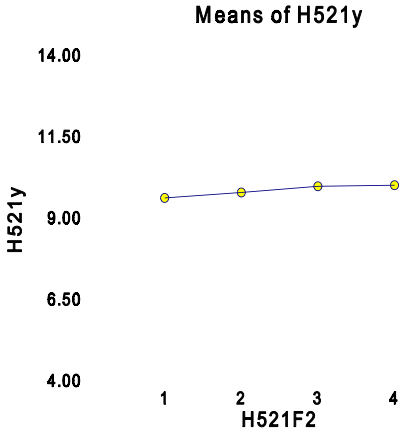
Protože F_e = 0.405 je menší než $F_{1\text{-}0.05}(3, 18)$ = 3.009, je nulová hypotéza přijata a faktor A je statisticky nevýznamný. Protože F_e = 120.175 je větší než $F_{1\text{-}0.05}(2, 18)$ = 3.403, je nulová hypotéza zamítnuta a faktor B je statisticky významný. Protože F_e = 0.051 je menší než $F_{1\text{-}0.05}(3 . 2, 18)$ = 2.508, je nulová hypotéza přijata a interakce faktor A a B je statisticky nevýznamná.

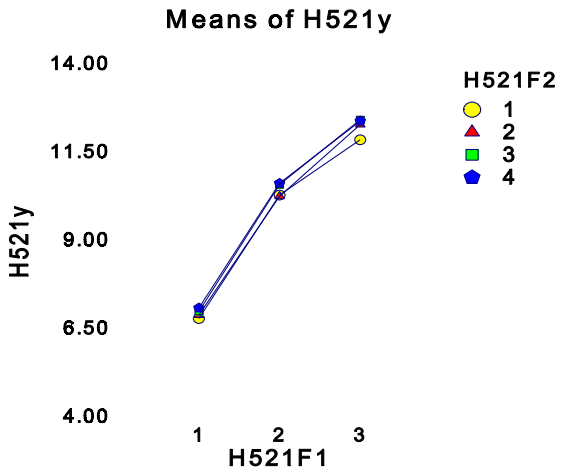
3. Zkouška transformace: korelační koeficient, R = 0.491, protože není blízký nule není transformace nutná.

4. Závěr: Na ztrátu hmotnosti pálením má významný vliv pouze typ keramické suroviny.

5. Grafy a diagramy:







Obr. 5.4 Vyvážená dvoufaktorová analýza rozptylu v úloze H5.21:
Předešlá strana, vlevo: Diagram průměrů pro rozličné úrovně faktoru A (tři různé kovy slitiny).
Předešlá strana, vpravo: Diagram průměrů pro rozličné úrovně faktoru B (7 různých svarů).
Vlevo: Diagram průměrů pro rozličné úrovně obou faktorů A a B.

Vzorová úloha 5.5 *Nevyvážená dvoufaktorová analýza rozptylu*

Na úloze **E5.05** *Porovnání stanovení arzeniku v pěti laboratořích* dvěma metodami ukážeme aplikaci nevyvážené dvoufaktorové analýzy rozptylu s pevnými efekty a s nestejným počtem pozorování. Arzenik lze v potravě stanovit reakcí s molybdenovou solucí A1 a reakcí diethyldithiokarbamátem stříbrným dle Vašáka a Šedivce A2. Ke vzorku potravy bylo přidáno 15 g arzeniku a vzorek byl analyzován oběma metodami (faktor *A*) v pěti laboratořích B1 až B5 (faktor *B*) s vícenásobnou reprodukova-telností. Vedou obě metody ve všech laboratořích ke stejným výsledkům? Existuje statisticky významná interakce mezi analytickou metodou a laboratoří?

Řešení: Použijeme nevyvážené dvoufaktorové analýzy rozptylu s pevnými efekty s nestejným počtem pozorování ANOVA2U programem ADSTAT pro hladinu významnosti $\alpha = 0.050$. Počet úrovní faktoru *A*, $i = 1, ..., 5$. Počet úrovní faktoru *B*, $j = 1, ..., 2$. Nestejný počtem opakování *o* v každé jedné buňce.

1. Data na různých úrovních faktorů *A* a *B*:

Úrovně faktoru *A* (řádky) index *i*, úrovně faktoru *B* (sloupce) index *j*, opakování v cele index *o*.

i	***j***	***o***	**Stanovený obsah arzeniku v gramech:**					
1	1	6	12.90	13.20	12.90	12.90	13.10	13.00
1	2	5	13.40	13.00	13.00	17.00	16.60	
2	1	6	14.60	16.20	14.00	15.00	15.50	13.70
2	2	4	14.80	15.20	14.60	15.00		
3	1	6	13.40	13.00	13.20	13.20	13.10	13.20
3	2	5	14.80	14.80	15.00	14.90	14.80	
4	1	6	13.30	13.80	12.50	13.50	13.60	12.80
4	2	6	14.80	14.80	15.00	14.50	15.40	15.20
5	1	6	15.90	14.80	15.30	15.60	14.90	15.20
5	2	5	13.80	14.10	13.80	13.90	14.00	

2. Průměry a úrovně efektů:

Celkový průměr = 1.4278E+01

Reziduální rozptyl = 5.4025E-01

Faktor *A*: *E505F1*

Úroveň	**Průměr**	**Efekt**
1	13.80	-0.4780
2	14.86	0.5887
3	14.02	-0.2563
4	14.10	-0.1780
5	14.60	0.3237

Faktor *B*: *E505F2*

Úroveň	**Průměr**	**Efekt**
1	13.91	-0.3680
2	14.64	0.36800

3. Tabulka ANOVA s interakcemi faktorů *A*, *B*:

H_0: Efekty faktoru *A* jsou nulové, **H_A :** ... nejsou nulové

Kvantil F(1-alfa, *K*-1, *M K*(*O*-1) = 2.584

H_0: Efekty faktoru *B* jsou nulové, **H_A :** ... nejsou nulové

Kvantil F(1-alfa, *M*-1, *M K*(*O*-1) = 4.062

H_0: Interakce I je nulová, **H_A :** ... není nulová, (zde I znamená efekty interakcí *A* a *B* dohromady)

Kvantil F(1-alfa, (*K*-1)(*M*-1), *K M*(*O*-1)) = 2.584

Zdroj	**Stupně**	**Součet**	**Průměrný**	**Testační**	**Závěr**	**Spočtená**

rozptylu	volnosti		čtverců	čtverec	kritérium	H_0 je	hlad.výz.
Mezi úrovněmi *A* *N*-1	=	4	8.4018	2.1004	3.888	Zamítnuta	0.009
Mezi úrovněmi *B* *M*-1	=	1	7.3202	7.3202	13.550	Zamítnuta	0.001
Interakce (*N*-1)(*M*-1)	=	4	20.04	5.0107	9.275	Zamítnuta	0.000
Rezidua *M N* (*O*-1)	=	44	23.80	0. 54025			
Celkový *M N O*-1	=	53	62.15	1.1715			

Protože F_e = 3.888 je větší než $F_{1-0.05}(4, 44)$ = 2.584, je nulová hypotéza zamítnuta a faktor *A* (vliv analytické metody) je statisticky významný. Protože F_e = 13.550 je větší než $F_{1-0.05}(1, 44)$ = 4.062, je nulová hypotéza zamítnuta a faktor *B* (vliv laboratoře) je statisticky významný. Protože F_e = 9.275 je větší než $F_{1-0.05}(4 . 1, 44)$ = 2.584, je nulová hypotéza zamítnuta a interakce faktor *A* a *B* je statisticky významná.

4. Závěr: Vliv analytické metody, laboratoře a interakce metody a laboratoře pro stanovení obsahu arzeniku v potravě jsou statisticky významné.

Vzorová úloha 5.6 *Schéma O&R analýzy*

Burdik a Larsen vyšetřovali způsobilost monitorování koncentrace kyseliny ve velké nádrži. Z nádrže bylo odebráno 10 vzorků kyseliny, *I* = 10. Náhodným výběrem byli dále vybráni 3 operátoři, *J* = 3, a každý operátor změřil koncentraci kyseliny u každého z 10 vzorků 3krát, *K* = 3, a to za použití vždy stejného laboratorního zařízení. Měření operátorů měla náhodné pořadí. Předpokládá se, že operátoři byli dostatečně zkušení chemici. Vstupní data O&R analýzy byla tvořena 90 hodnotami koncentrace kyseliny. Každý vzorek představuje tři řádky v matici dat, tři sloupce představují tři operátory. Chybějící hodnoty v této analýze nejsou dovoleny.

Data: Data jsou uvedena ve čtveřicích v pořadí: číslo vzorku, 1. operátor, 2. operátor, a 3. operátor.
1 67 66 69, 1 68 68 67, 1 68 68 68, 2 67 67 67, 2 66 67 66, 2 66 68 66, 3 68 70 68, 3 68 70 68,
3 67 68 68, 4 67 70 67, 4 67 68 68, 4 67 70 68, 5 68 70 69, 5 68 70 68, 5 68 70 69, 6 69 71 70,
6 68 70 70, 6 69 70 70, 7 67 68 68, 7 67 68 68, 7 67 68 69, 8 75 75 75, 8 74 75 75, 8 74 75 75,
9 67 69 68, 9 67 68 68, 9 67 69 68, 10 66 68 66, 10 66 66 66, 10 66 66 66.

Řešení: Software NCSS2000

1. Přehled dat: aktuální počet musí být roven očekávanému počtu, jinak by v datech byly díry, což je pro tento druh analýzy nepřípustné.

Položka	Skutečná četnost	Očekávaná četnost
Celkový počet	90	90
Počet vzorků	10	
Počet operátorů 3		
Počet opakování 3		

Počet vzorků: četnost vzorků. **Počet operátorů**. **Počet opakování:** počet opakování měření operátorem.

2. Očekávaný průměrný čtverec a složky rozptylu: jsou vyčísleny bodový a intervalový odhad od každé složky rozptylu. Jde o vyváženou dvoufaktorovou analýzu rozptylu.

Složka, zdroj rozptylu	SV	Očekávaný průměrný čtverec	Složka rozptylu	Dolní mez 90% int. spolehlivosti rozptylu komp.	Horní mez 90% int. spolehlivosti rozptylu komp.
Vzorky (*V*)	9	R+3(VO)+9(V)	5.615638	2.948817	15.33656
Operátoři (*O*)	2	R+3(VO)+30(O)	0.3563786	0.1016096	7.389713
Interakce (*V*O)	18	R+3(PO)	0.1251029	0.0238500	0.3455315
Opakování (*R*)	60	R	0.3444445	0.2613323	0.4785284

Složka, zdroj rozptylu: zdroj rozptylu v datech. **SV**: za stupně volnosti. **Očekávaný průměrný čtverec:** symbolická hodnota pro průměrný čtverec, když se v ANOVA modelu předpokládají vyvážená data. Zde *V*

představuje σ_V^2, *O* představuje σ_O^2, *VO* představuje σ_{VO}^2 a *R* představuje σ_g^2. **Složky rozptylu:** σ_V^2, σ_O^2, σ_{VO}^2 a σ_g^2. **Dolní mez** 90% intervalu spolehlivosti dotyčné složky rozptylu; **Horní mez** 90% intervalu spolehlivosti dotyčné složky rozptylu.

3. ANOVA tabulka: testuje statistickou významnost jednotlivých složek rozptylu.

Složka, zdroj rozptylu	**SV**	**Suma čtverců**	**Průměrný čtverec**	***F*-test**	**Spočtená hladiná významnosti**
Vzorky	9	461.3445	51.26049	71.22	0.000000
Operátoři	2	22.82222	11.41111	15.85	0.000107
Interakce	18	12.95556	0.7197531	2.09	0.017450
opakování	60	20.66667	0.3444445		
Total (Adjust.)	89	517.7889			
Total	90				

Složka, zdroj rozptylu: zdroj rozptylu v modelu. **SV:** stupně volnosti. **Suma čtverců:** pro úplnost se zde uvádí suma čtverců. **Průměrný čtverec:** odhad rozptylu této složky. Jde o sumu čtverců odchylek dělenou patřičným počtem stupňů volnosti. ***F*-test:** poměr průměrného čtverce tohoto zdroje a průměrného čtverce jeho odpovídajícího chybového zdroje. **Spočtená hladina významnosti:** vypočtená α pro *F*-test. Je-li spočtená α menší než 0.05, *F*-test je statisticky významný. Hvězdička u hodnoty *F*-testu pak značí statistickou významnost.

4. Přehled složek, zdrojů rozptylu:

Složka, zdroj rozptylu	**Rozptyl**	**Procento rozptylu**	**Směrodatná odchylka**	**Dolní mez 90%ní intervalu spolehliv.**	**Horní mez 90%ní intervalu spolehliv.**	**Procento celk. směr. odchylky**
Vzorky	5.615638	87.1782	2.3697	1.7172	3.9162	93.3693
Operátoři	0.356379	5.5325	0.5970	0.3188	2.7184	23.5212
Interakce	0.125103	1.9421	0.3537	0.1544	0.5878	13.9360
Reprodukovatelnost	0.481481	7.4746	0.6939	0.4349	2.7415	27.3397
Opakovatelnost	0.344444	5.3472	0.5869	0.5112	0.6918	23.1241
O a *R*	0.825926	12.8218	0.9088	0.7443	2.8044	35.8076
Celková proměnliv.	6.441564	100.0000	2.5380	1.9394	4.2947	100.0000

Složka, zdroj rozptylu: jména složek, zdrojů rozptylů, které se vyčíslují. První čtyři řádky byly vysvětleny předešle. *Vzorek* značí σ_V^2 rozptyl mezi vzorky. *Operátoři* značí σ_O^2 rozptyl mezi operátory. *Interakce* značí σ_{VO}^2 interakční rozptyl. *Opakovatelnost* značí σ_g^2 rozptyl, která se objeví když jeden operátor měří stejný vzorek neustále opakovaně. *Reprodukovatelnost* se týká rozptylu mezi operátory $\gamma_1 = \sigma_O^2 + \sigma_{VO}^2$. R&O analýza se týká *sumy reprodukovatelnosti a opakovatelnosti* $\gamma_2 = \sigma_O^2 + \sigma_{VO}^2 + \sigma_g^2$. *Celkový rozptyl* je přitom tvořena sumou všech čtyř zdrojů rozptylu $\sigma_T^2 = \sigma_V^2 + \sigma_O^2 + \sigma_{VO}^2 + \sigma_g^2$. **Rozptyly:** odhady všech složek rozptylu σ_V^2, σ_O^2, σ_{VO}^2, σ_g^2, γ_1, γ_2, σ_T^2. **Procento z celkového rozptylu:** ukazuje na procentuální zastoupení dotyčné složky rozptylu v celkovém rozptylu. **Směrodatná odchylka:** je odmocnina z dotyčné složky rozptylu. **Dolní (a horní) mez 90% intervalu spolehlivosti směrodatné odchylky; Procento z celkové směrodatné odchylky:** ukazuje na procentuální zastoupení dotyčné složky směrodatné odchylky v celkové směrodatné odchylce. Suma jednotlivých složek směrodatné odchylky nemusí nutně dát 100, protože toto pravidlo platí pro rozptyly.

5. Procento procesního rozptylu: dává složky procesního rozptylu násobené hodnotou sigma koeficientu (který má předvolenou hodnotu 5.15). Toto vynásobení převede všechny hodnoty do stejné metriky jako jsou regulační limity, takže mohou být porovnávány přímo. Například, rozptyl, která se objeví, když stejný operátor měří stejný vzorek dvakrát přidá mezi 2.6327 a 3.5626 ke směrodatné odchylce.

Složka, zdroj	**Dolní mez**	**5.15**	**Horní mez**	**Procento**	**Procento**

rozptylu	90% int. spol.	směr.odch.	90% int. spol.	rozptylu	příspěvku
Vzorky	8.8436	12.2041	20.1684	93.3693	87.1782
Operátoři	1.6416	3.0744	13.9998	23.5212	5.5325
Interakce	0.7953	1.8215	3.0273	13.9360	1.9421
Reprodukovatelnost	2.2395	3.5735	14.1187	27.3397	7.4746
Opakovatelnost	2.6327	3.0225	3.5626	23.1241	5.3472
O a *R*	3.8332	4.6803	14.4425	35.8076	12.8218
Celková proměnliv.	9.9877	13.0708	22.1175	100.0000	100.0000
Je-li procento *O&R* větší než 30%, měřicí systém je nepřijatelný.					

Reprodukovatelnost(2) značí σ_O^2 rozptyl od operátorů. **Dolní (a horní) mez 90% intervalu spolehlivosti směrodatné odchylky** ve dvou sloupcích. Hodnoty jsou násobeny sigma koeficientem, jak bylo uvedeno výše. **5.15 směrodatná odchylka:** je to odmocnina každé složky rozptylu, násobená sigma koeficientem (předvoleno 5.15). **Procento celkového rozptyl:** je to 100násobek poměru směrodatné odchylky tohoto zdroje ku celkové směrodatné odchylce v posledním řádku. **Procento příspěvku:** je 100násobkem poměru tohoto zdroje ku rozptylu celkovému v posledním řádku.

6. Procento tolerance: je podobné předchozí tabulce, kromě toho, že za jmenovatele v posledních dvou sloupcích je užita *tolerance* místo celkového rozptylu.

Složka, zdroj rozptylu	Dolní mez 90% int. spol.	5.15 směr.odch.	Horní mez 90% int. spol.	Procento tolerance
Vzorky	8.8436	12.2041	20.1684	30.5103
Operátoři	1.6416	3.0744	13.9998	7.6860
Interakce	0.7953	1.8215	3.0273	4.5539
Reprodukovatelnost	2.2395	3.5735	14.1187	8.9338
Opakovatelnost	2.6327	3.0225	3.5626	7.5563
O a *R*	3.8332	4.6803	14.4425	11.7009
Celková proměnliv.	9.9877	13.0708	22.1175	32.6771
Horní spec. mez	88			
Dolní spec. mez	48			
Tolerance	40			
Je-li procento *O&R* hodnoty mezi 10% a 20%, měřicí systém je přijatelný.				

7. Testační rozhodčí kritéria: tabulka přináší hodnoty intervalu spolehlivosti čtyř kritérií, užitečných pro *O&R* analýzu. Uživatel rozhodne, zda užije bodový nebo intervalový odhad k vyhodnocení dat. Kritéria jsou založena na hodnotě poměru δ. Jsou to *RK, SNR, M* a *PT.*

Index	Dolní mez 90% int. spol.	Hodnota	Horní mez 90% int. spol.
Rozhodčí kategorie *RK*	1.1924	3.6876	6.2979
SNR	0.8431	2.6075	4.4533
Chyba měření *M* 5.5823	6.8160	21.0328	
Poměr *PT*	11.1647	13.6321	42.0655
Je-li dolní mez intervalu spolehlivosti rozhodčí kategorie *RK* měnší než 3, měřicí proces je neadekvátní.			
Je-li horní mez intervalu spolehlivosti chyby měření *M* menší než 25%, chyba měření může být zanedbána.			

SNR* (poměr signál ku šumu):** *SNR* = %δ vyjadřuje poměr směrodatné odchylky od vzorku ke vzorku vůči rozptylu měření. Jako výrobce se především zajímáme o rozptyl od vzorku ke vzorku. Směrodatná odchylka měření odhaluje šum, který je přidán k rozptylu od vzorku ke vzorku díky přibližné povaze měřicího systému. ***RK* (rozhodčí kategorie)**: *RK* = %(2δ) vyjadřuje počet rozhodčích kategorií produktu, které mohou být spolehlivě rozlišeny měřicím postupem. **Chyba měření *M: porovnává směrodatnou odchylku měření vůči toleranci. Za toleranci se bere

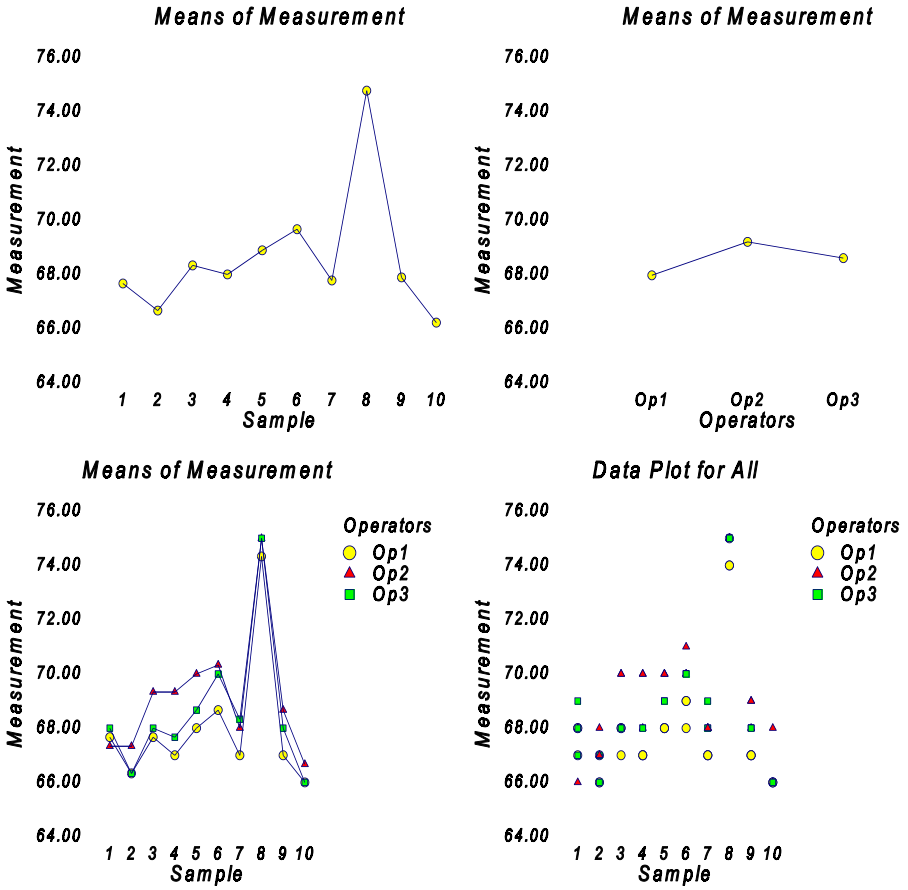
rozdíl mezi horní a dolní toleranční mezí. Platí pravidlo: tato hodnota by měla být menší než 25 %, aby byl měřicí systém uznán za přiměřený. **Poměr přesnosti vůči toleranci *PT***: je mírně odlišnou verzí kritéria *M*.

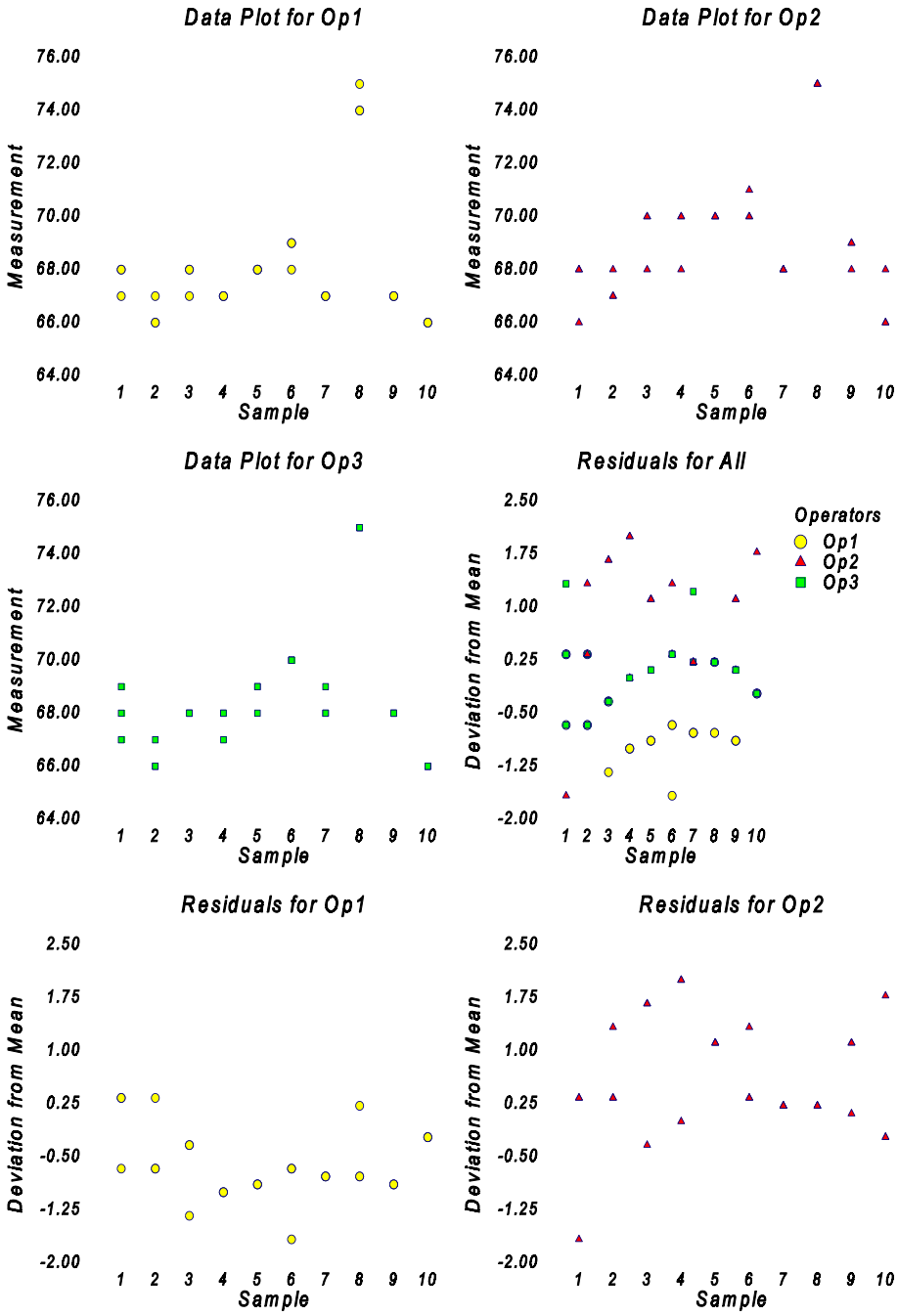
8. Průměry a vychýlení: umožňuje snadno nalézt odlehlé hodnoty.

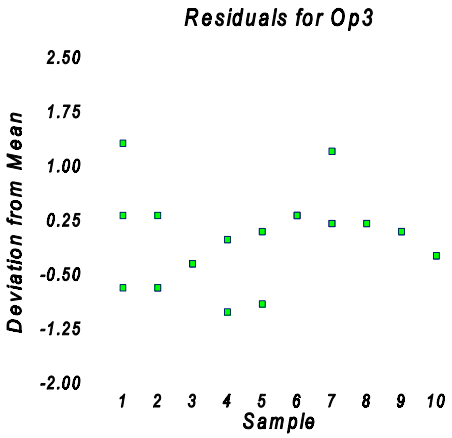
Zdroj rozptylu	**Počet**	**Průměr**	**Odchylka od cíle**
Celkově	90	68.589	0.589
Vzorek			
1	9	67.667	-0.333
2	9	66.667	-1.333
Vzorek			
3	9	68.333	0.333
4	9	68.000	0.000
5	9	68.889	0.889
6	9	69.667	1.667
Vzorek			
7	9	67.778	-0.222
8	9	74.778	6.778
9	9	67.889	-0.111
10	9	66.222	-1.778
Operátoři			
Op1	30	67.967	-0.033
Op2	30	69.200	1.200
Op3	30	68.600	0.600
Vzorek, Operátoři			
1,Op1	3	67.667	-0.333
1,Op2	3	67.333	-0.667
1,Op3	3	68.000	0.000
Vzorek, Operátoři			
2,Op1	3	66.333	-1.667
2,Op2	3	67.333	-0.667
2,Op3	3	66.333	-1.667
3,Op1	3	67.667	-0.333
Vzorek, Operátoři			
3,Op2	3	69.333	1.333
3,Op3	3	68.000	0.000
4,Op1	3	67.000	-1.000
4,Op2	3	69.333	1.333
Vzorek, Operátoři			
4,Op3	3	67.667	-0.333
5,Op1	3	68.000	0.000
5,Op2	3	70.000	2.000
5,Op3	3	68.667	0.667
Vzorek, Operátoři			
6,Op1	3	68.667	0.667
6,Op2	3	70.333	2.333
6,Op3	3	70.000	2.000
7,Op1	3	67.000	-1.000
Vzorek, Operátoři			

7,Op2	3	68.000	0.000
7,Op3	3	68.333	0.333
8,Op1	3	74.333	6.333
8,Op2	3	75.000	7.000
Vzorek, Operátoři			
8,Op3	3	75.000	7.000
9,Op1	3	67.000	-1.000
9,Op2	3	68.667	0.667
9,Op3	3	68.000	0.000

Grafy:




Data Plot for Op1
Measurement
Sample
Data Plot for Op2
Measurement
Sample
Data Plot for Op3
Measurement
Sample
Residuals for All
Deviation from Mean
Sample
Operators
Op1
Op2
Op3
Residuals for Op1
Deviation from Mean
Sample
Residuals for Op2
Deviation from Mean
Sample



Obr. 5.5 Na uvedených obrázcích R&O analýza ukazuje rozličné grafy průměrů, dat a reziduí.