5

ANALÝZA ROZPTYLU

Analýza rozptylu, ANOVA (z anglického **An**alysis **o**f **Va**riance), se v technické praxi používá buď jako samostatná technika, nebo jako postup, umožňující analýzu zdrojů variability u lineárních statistických modelů. Cílem je zjistit, které z kvalitativních nebo kvantitativních faktorů významně ovlivňují sledované veličiny. Nejde přitom o to jak ovlivňují, ale zda vůbec ovlivňují. V technické praxi se ANOVA uplatňuje jako samostatná technika v úlohách:

(a) Určení vlivu způsobu přípravy vzorků na výsledek analýzy.
(b) Určení vlivu přístroje, lidského faktoru a obsluhy na výsledek měření.
(c) Zpracování různých mezilaboratorních experimentů.
(d) Zpracování plánovaných experimentů, u kterých se systematicky sleduje vliv rozličných faktorů (teploty, času, koncentrace a dalších) na výsledek reakce či analýzy.

Podstatou analýzy rozptylu je rozklad celkového rozptylu dat na *složky objasněné* (známé zdroje variability) a *složku neobjasněnou*, o níž se předpokládá, že je náhodná. Následně se testují hypotézy o významnosti jednotlivých zdrojů variability.

Prvním krokem analýzy rozptylu je určit, zda jde o model analýzy rozptylu s pevnými, náhodnými nebo smíšenými efekty. Vlastní postup analýzy rozptylu lze rozdělit do pěti kroků, jimiž jsou:

1. Odhad parametrů základního modelu ANOVA.
2. Testování jeho významnosti a konstrukce různých modelů.
3. Vyjádření složek rozptylů a testování jejich významnosti.
4. Ověření předpokladu normality a indikace silně vybočujících hodnot.
5. Interpretace výsledků s ohledem na zadání dat a jejich případné úpravy.

5.1 Jednofaktorová analýza rozptylu (ANOVA1)

Formulace modelu: sleduje se faktor A na K různých úrovních $A_1, \dots, A_K$. Na každé úrovni A_i je provedeno n_i měření $\{y_{ij}\}$, $j = 1, \dots, n_i$. Model analýzy rozptylu má tvar

$$y_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad j = 1, \dots, n_i, \quad \text{kde} \quad \mu_{ij} = \mu + \alpha_i$$

a α_i je *efekt i-té úrovně*. Parametry μ_i, μ a α_i se odhadují pomocí odpovídajících výběrových průměrů. *Celkový počet měření* je $N = \sum_{i=1}^{K} n_i$. *Sloupcový průměr* $\hat{\mu}_i$ představuje součet hodnot opakovaného měření y_{ij} pro úroveň faktoru A_i, dělený počtem opakování n_i,

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} .$$

Celkový průměr je součet všech hodnot y_{ij} dělený celkovým počtem dat N, který je roven průměru K sloupcových průměrů

$$\hat{\mu} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \hat{\mu}_i .$$

Pro výpočet odhadu i-tého efektu α_i lze použít vztah $\hat{\alpha}_i = \hat{\mu}_i - \hat{\mu}$. Zavedením efektů vznikne přeurčený model, obsahující o jeden parametr více. Proto se při odhadu efektů používá omezující podmínka $\sum_{i=1}^{K} n_i \alpha_i = 0$ a pro vyvážené experimenty $\sum_{i=1}^{K} \alpha_i = 0$. Klasická jednofaktorová analýza rozptylu dat a Kruskalo-va-Wallisova jednofaktorová analýza rozptylu pořadí dat porovnává střední hodnoty dvou či více úrovní faktoru A čili sloupců v matici dat za účelem určit, zda alespoň jedna sloupcová střední hodnota se liší od ostatních. Statistická významnost je testována F-testem tak, že nulová hypotéza H_0 říká "*Všechny střední hodnoty jsou stejné*" proti alternativní H_A "*Alespoň jedna střední hodnota se odlišuje od ostatních*".

Základní předpoklady jednofaktorové analýzy rozptylu dat. Před použitím analýzy rozptylu musí být ověřeny následující předpoklady o výběru:

1. Data mají normální rozdělení: náhodné chyby ε_{ij} jsou náhodné veličiny s normálním rozdělením a střední hodnotou chyb rovnou nule $N(0, \sigma^2)$.
2. Rozptyly sloupcových výběrů σ^2 jsou stejné (homoskedasticita).
3. Každý sloupec je prostým náhodným výběrem ze svého souboru: každý prvek souboru má stejnou pravděpodobnost, že bude vybrán do výběru.

Základní předpoklady Kruskalova-Wallisova testu analýzy rozptylu dat. Před použitím analýzy rozptylu musí být ověřeny následující předpoklady o výběru:

1. Měrná stupnice je přinejmenším ordinální.
2. Rozdělení souborů musí být stejné, kromě míry polohy. Rozptyly jsou stejné (homoskedasticita).
3. Všechny sloupce představují náhodné výběry svých souborů.

Omezení: velikost výběru může být od několika jednotek až po několik stovek prvků. Snad největší omezení v datech se týká náhodného výběru ze souboru: když totiž nebude výběr náhodný, hladiny významnosti budou nesprávné.

Testování: součet čtverců odchylek od celkového průměru $\hat{\mu}$, definovaný vztahem

$$S_c = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{\mu})^2 ,$$

lze rozložit na dvě složky

$$S_c = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} [(y_{ij} - \hat{\mu}_i) + (\hat{\mu}_i - \hat{\mu})]^2 = S_A + S_R ,$$

kde S_A představuje *rozptyl mezi jednotlivými úrovněmi daného faktoru*

$$S_A = \sum_{i=1}^{K} n_i \, (\hat{\mu}_i - \hat{\mu})^2$$

a S_R je *rozptyl reziduální* tj. uvnitř jednotlivých úrovní,

$$S_R = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{\mu}_i)^2 .$$

Nevychýleným odhadem rozptylu chyb σ_e^2 je *průměrný reziduální čtverec* MS_R dle

$$MS_R = \frac{S_R}{N - K} = \hat{\sigma}_e^2 .$$

Cílem jednofaktorové analýzy je především testování, zda jsou efekty α_i nulové, tedy zda jednotlivé úrovně daného faktoru jsou statisticky nevýznamně odlišné. Testuje se nulová hypotéza H_0: $\alpha_i = 0$, $i = 1, ..., K$, proti alternativní H_A: $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, ..., K$. Při testování se využívá faktu, že veličina S_A / σ_e^2 má χ^2-rozdělení s $(K - 1)$ stupni volnosti a veličina S_R / σ_e^2 má nezávislé χ^2-rozdělení s $(N - K)$ stupni volnosti. Jejich podíl má pak F-rozdělení s $(K - 1)$ a $(N - K)$ stupni volnosti. Testační statistika F_e má tvar

$$F_e = \frac{MS_A}{MS_R} = \frac{S_A\,(N - K)}{S_R\,(K - 1)} .$$

Při platnosti nulové hypotézy H_0 má F_e statistika F-rozdělení s $(K - 1)$ a $(N - K)$ stupni volnosti. Vyjde-li F_e větší než kvantil $F_{1-\alpha}(K - 1, N - K)$, je nutné nulovou hypotézu H_0 na hladině významnosti α zamítnout a efekty považovat za nenulové, čili statisticky významné.

Vícenásobné porovnávání (**M**ultiple **C**omparison **P**rocedure, **MCP**). Když ANOVA určí, že faktor A je statisticky významný, je možné nalézt úrovně faktoru A, které se významně liší od ostatních.

Druhy porovnávacích metod MCP. Volba porovnávací metody je ovlivněna odpovědí na následující dvě otázky: (1) Víme už v průběhu experimentu, co chceme porovnávat? (2)

Zajímáme se o všechny nebo jenom o některá porovnání? Budeme přitom rozlišovat dva typy chyb, chyby typu metodického a chyby typu experimen-tálního.

Metodická chyba δ: každé porovnání dvou průměrů se bere jako jediný test, který se provedl a označuje se δ. Pojmovou jednotkou je proto *chyba pro jedno porovnání.* Ostatní testy na datech jsou pak ignorovány vzhledem k výpočtu hodnoty chyby. *Experimentální chyba* δ_f *:* hodnota chyby vyšla ze skupiny nezávislých testů. Je to pravděpodobnost nabytí jedné či více chyb typu I ve skupině nezávislých porovnání. Označíme tuto *chybu u skupiny nezávislých testů* δ_f. Vztah mezi oběma typy chyb je

$$\delta_f = 1 - (1 - \delta)^c \quad ,$$

kde *c* je celkový počet porovnání, provedených v úloze.

Definice metod MCP. Všechny MCP metody předpokládají nezávislost mezi úrovněmi faktoru čili sloupcovými výběry, homoskedasticitu a normalitu (kromě Kruskalova-Wallisova testu). Budiž $\bar{y}_i$ sloupcový průměr a n_i velikost sloupcového výběru *i*-tého sloupce, s^2 představuje průměrný čtverec chyb, způsobených N - K stupni volnosti a při uvažování *K* úrovní faktoru *A*. Vícenásobné porovnávání může být provedeno (1) *automaticky*, kdy každý sloupcový průměr je porovnáván s každým, nebo (2) *plánovaně* dle zadaných váhových koeficientů C_i , i = 1, ..., *K,* kdy budeme porovnávat určité vybrané sloupce s jinými vybranými sloupci. Jestliže všechny koeficienty C_i vykazují součet rovný nule, porovnání se nazývá *kontrast*. Koeficienty C_i se zadávají následujícím způsobem: chceme, například, pro 6 sloupců porovnat pouze první dva sloupcové průměry s posledními dvěma, tzn. vyčíslit významnost rozdílů $\bar{y}_5 - \bar{y}_1$, $\bar{y}_5 - \bar{y}_2$, $\bar{y}_6 - \bar{y}_1$, $\bar{y}_6 - \bar{y}_2$, což zapíšeme pomocí vahových koeficientů: C_1 = -1, C_2 = -1, C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 1, C_6 = 1. Všimněte si, že suma vahových koeficientů musí dávat nulu a porovnání je proto kontrastem.

Bonferroniho porovnání všech párů. Test má odhalit, které páry se liší. Zvolí se metodická chyba δ tak, že bude korigovat požadovanou experimentální chybu δ_f. Je-li *K* sloupcových průměrů a zájem vyšetřit všechny možné kombinace párů sloupcových průměrů, metodická chyba δ je definována vztahem:

$$\delta = \frac{\delta_f}{K.K - 1}$$

a testační kritérium statistické významnosti testovaných párů je pro ν = *N* - *K* stupňů volnosti a γ = α dáno vztahem

$$\frac{|\bar{y}_i - \bar{y}_j|}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}} \geq t_{\gamma,\nu} \quad .$$

Bonferroniho porovnání sloupců vůči kontrolnímu. Jestliže jeden sloupec bude představovat *kontrolní sloupec* a všechny ostatní sloupce budeme porovnávat s kontrolním, půjde o v = K-1 porovnání. Zvolíme metodickou chybu δ dle vzorce[17]

$$\delta = \frac{\delta_f}{2(K - 1)} \; .$$

Standardní porovnání. Plánovaný test významnosti určitého zvoleného porovnání, který se týká metodické chyby. Zadává se jedna z porovnávacích voleb: (a) standardního porovnání, (b) porovnání ortogonálními polynomy, (c) porovnání každého sloupce s prvním, (d) porovnání každého sloupce s posledním, (e) porovnání při více než třech uživatelských kontrastech a další volby. Nastavíme hladinu metodické chyby tak, že dosáhneme specifické hodnoty celkové chyby. Studentovo testační kritérium významnosti sloupcových průměrů testovaných párů je pro $\nu = N - K$ stupňů volnosti a $\gamma = \alpha/2$ dáno vztahem

$$\frac{\left|\sum_{j=1}^{K} C_j \, \bar{y}_j\right|}{s\sqrt{\sum_{j=1}^{K} \frac{C_j^2}{n_j}}} \geq t_{\gamma,\nu} \; .$$

Uvedeme ukázku zadání způsobu (a) "standardního porovnání": pro například $K = 4$ úrovně faktoru A máme k dispozici tři volby porovnání sloupcových průměrů. Všimněte si, že suma vahových koeficientů dává vždy nulu čili jde o kontrast.

Váhové koeficienty C_j	Provádí porovnání sloupcových průměrů:
-3, 1, 1, 1	Porovnává průměr 1. sloupce s průměry všech vyšších ostatních, tj. s průměry 2., 3. a 4. sloupce.
0, -2, 1, 1	Porovnává průměr 2. sloupce s průměry všech vyšších ostatních, tj. s průměry 3. a 4. sloupce.
0, 0, -1, 1	Porovnává průměr 3. sloupce s průměry všech vyšších ostatních, tj. s průměry 4. sloupce.

Kruskalovo-Wallisovo porovnání Z-skóre. Hodnoty Z-skóre (*standardizovaná veličina*, kdy od prvků sloupce je odečten sloupcový průměr a pak jsou poděleny směrodatnou odchylkou) jsou zde využity k porovnání sloupcových mediánů v páru při nesplnění předpokladů výběrové normality. Test však vyžaduje výběr o minimální četnosti $n_i = 5$ (a lépe ještě vyšší) v každé úrovni faktoru A. Hladina chyby je nastavena na základě metodické chyby tak, aby poskytla experimentální hladinu chyby δ_f. Za střední hodnoty může test užít vedle mediánu také průměr pořadí, jak je zřejmé ze vzorce pro $\delta = \delta_f / K(K - 1)$, porovnávající sloupec i se sloupcem j

$$\frac{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|}{\sqrt{\frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}} \geq z_\alpha \; ,$$

kde N je celkový počet prvků, n_i je počet prvků v i-tém sloupci, R_i je suma pořadí v i-tém sloupci. Rozdělení z_{ij} je normální se střední hodnotou nula a rozptylem jedna. Je-li vypočtená hodnota z_{ij} pro dva sloupce (i a j) větší než kritická hodnota, pak se sloupcové průměry významně liší.

Scheffeho porovnání. Vyšetřuje všechna možná porovnání K sloupcových průměrů. Testační kritérium významnosti pro páry sloupcových průměrů je pro K-1 a pro $\nu = N - K$ stupňů volnosti rovno nebo větší než $\sqrt{(K - 1)\ F_{\alpha,K-1,\nu}}$. Je stejné jako Bonferroniho porovnání.

Postup jednofaktorové analýzy rozptylu (ANOVA1)

Vstupem je tabulka dat, obsahující pro jednotlivé sloupce čili úrovně $A_1, ..., A_K$ faktoru A vždy n_i pozorování $\{y_{ij}\}$, $i = 1, ..., K$ a $j = 1, ..., n_i$. Pro všechny testy je obvykle uvažována hladina významnosti $\alpha = 0.05$. Postup obsahuje kroky:

1. Přípravu dat: už přípravou dat lze zajistit větší věrohodnost dosažených výsledků.

(a) *Velikost výběru* je počet plných řádků. ANOVA byla původně odvozena za předpokladu, že četnosti ve sloupcích jsou shodné. V praxi je však tento předpoklad zřídka splněn. Stejně však platí, že čím těsněji je toto pravidlo splněno, tím věrohodnější jsou výsledky. Lze analyzovat i malé výběry, 4 až 5 hodnot ve sloupci. Máme-li testovat všechny výběrové předpoklady, je třeba prvků ve sloupci více, ze statistického hlediska nejlépe 30 a více.

(b) *Chybějící hodnoty* mohou způsobit vychýlení výsledků. V každém případě je poněkud nebezpečné analyzovat výběr s řadou chybějících hodnot.

(c) *Typ dat*: matematické pozadí F-testu požaduje, aby data byla *spojitá*. Kvůli zaokrouhlo-vání při zápisu dat, jsou všechna data vlastně technicky vzato diskrétní. Požadavek spojitosti je proto na místě, jsou-li data hodně zaokrouhlovaná.

(d) *Odlehlé hodnoty* obecně způsobují zborcení F-testů. Je třeba prozkoumat data v grafech exploratorní analýzy dat EDA, často se užívá krabicový graf. Pak následuje vyšetření, zda se odlehlé hodnoty vyskytují pouze v jednom sloupci nebo i v ostatních. Je-li odlehlá hodnota v datech pouze jednou, je třeba ji odstranit. Pakliže ji v datech ponecháme, je třeba dát přednost neparametrickému testování, F-test by totiž mohl selhat.

2. Ověření výběrových předpokladů: nestačí se soustředit na tabulku výsledků testování ANOVA. Je třeba pečlivě ověřit splnění základních předpokladů o výběru. Často data nemají ve všech sloupcích normální rozdělení a je třeba použít mocninnou (nebo logaritmickou) transformaci dat. Po transformaci pak data již vykazují normální rozdělení. I když je pouze jediný sloupec s nenormální rozdělením, transformace celého výběru přinese zlepšení výsledků.

(a) *Náhodnost:* metoda odběru vzorku by měla zajistit, že každý prvek souboru má stejnou pravděpodobnost být vybrán do výběru.

(b) *Nezávislost:* aplikací von Neumannova testu ověříme nezávislost prvků výběru. Budeme-li, například, porovnávat levé a pravé pneumatiky u výběru určitého množství aut, nezávislost nebude zaručena.

(c) *Normalita:* nejlépe je začít vyšetřením rankitového grafu odchylek od totálního průměru. Pak následuje řada testů normality. Síla těchto testů se zvyšuje s velikostí výběru. I když byla normalita potvrzena, prověříme velikost výběru, zda je možné brát výsledky testu za dostatečně věrohodné.

(d) *Homoskedasticita:* aby bylo možné užít řadu statistických testů, je třeba ověřit, zda rozptyly sloupců jsou shodné (homoskedasticita). V krabicových grafech je sledována šířka krabic, zda je u všech sloupců stejná. Numericky lze ověřit homoskedasticitu pomoci modifiko-vaného Levenova testu[17].

3. Průměry a efekty úrovní: je proveden výpočet parametrů $\hat{\mu}_i$, $\hat{\mu}$, $\hat{\alpha}_i$, reziduí $\hat{e}_{ij}$, Jackknife reziduí $\hat{e}_{Ji}$ a diagonálních prvků H_{ii} projekční matice $\boldsymbol{H}$. Jsou identifikovány vlivné body, pro které je $\hat{e}_{Ji} > 2$ a $H_{ii} > 2K / \sum_{i=1}^{K} n_i$ (viz 6. kapitola).

4. Volbu statistických testů významnosti faktoru A v tabulce ANOVA: Je sestavena tabulka ANOVA a proveden *F*-test významnosti efektů faktoru *A*. Předem je třeba ověřit výběrové předpoklady a zvolit správný test:

(a) *Normalita a homoskedasticita dat:* aplikujeme *F*-test.

(b) *Normalita a heteroskedasticita dat:* pokusíme se stabilizovat rozptyl mocninnou transformací (nebo logaritmickou). Pak užijeme test shodnosti středních hodnot u dvou výběrů při nehomogenitě rozptylů. Nelze užít ani Kruskalův-Wallisův test, protože tento test také předpokládá shodné rozptyly obou výběrů.

(c) *Nenormalita a homoskedasticita dat:* užijeme Kruskalův-Wallisův test.

(d) *Nenormalita a heteroskedasticita dat:* když nejde data transformovat za účelem stabilizace rozptylu a zajištění normality, užijeme Kolmogorův-Smirnovův test (viz cit.[17]), který testuje obojí, průměry i rozptyly současně. Jelikož však už víme z Levenova testu (viz cit.[17]), že rozptyly nejsou stejné, je otázkou, zda Kolmogorův-Smirnovův test přinese něco nového.

Testování hypotéz: výklad analýzy rozptylu je snadný. Jednoduše sledujeme *F*-test. Je-li hodnota spočtené hladiny významnosti menší než předvolená hladina významnosti α (obyčejně 0.05), můžeme potvrdit, že přinejmenším dva sloupcové průměry jsou odlišné.

5. Vícenásobné porovnávání sloupcových průměrů MCP: postup předpokládá normalitu a homoskedasticitu výběrových sloupců. Není-li splněna normalita pro každý sloupec, je třeba užít Kruskalův-Wallisův test vícenásobného porovnávání MCP:

(a) *Plánované všechny možné páry:* víme-li dopředu, že budeme vyšetřovat všechny páry, užijeme Bonferroniho porovnávání párů.

(b) *Neplánované všechny možné páry:* užijeme Scheffeho porovnávání.

(c) *Každý versus kontrolní sloupec:* užijeme Bonferroniho porovnání všech sloupců vůči kontrolnímu.

(d) *Vybrané a plánované sloupce:* užijeme Standardní porovnávání a nastavíme hladinu α.

6. Grafy a diagramy: je konstruován rankitový graf Jackknife reziduí a transformační graf závislosti s_i vs. $\hat{\mu}_i$. Pokud jsou všechna data kladná a tato závislost je přibližně lineární, lze zvolit logaritmickou transformaci.

5.2 Dvoufaktorová analýza rozptylu bez opakování v cele

Při dvoufaktorové analýze rozptylu se provádí experimenty na různých úrovních dvou faktorů *A* a *B*. Kombinace úrovní faktorů tvoří typickou mřížkovou strukturu, jejímž elementem je tzv. ***cela***. Platí, že (i, j)-tá cela odpovídá kombinaci úrovně A_i faktoru *A* a B_j faktoru *B*. V každé cele je obecně n_{ij} pozorování. Často se však setkáváme s případem ***bez opakování***, kdy v každé cele je pouze jediné pozorování, $n_{ij} = 1$. Kromě řádkových α_i a sloupcových β_j efektů se zde vyskytuje také interakční člen τ_{ij}. Tento člen je důsledkem různých kombinací sloupcových a řádkových efektů.

	B_1	B_2	...	B_M
A_1	.	.	...	.
A_2	.		...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
A_N	.	.	...	.

cela A_2 B_2

Obvykle se užívá ***Tukeyův model interakce***, vyjádřený tvarem $\tau_{ij} = C\,\alpha_i\,\beta_j$, kde C je konstanta. U těchto modelů obsahuje každá cela právě jednu hodnotu y_{ij}. O chybách ε_{ij} se předpokládá, že jsou to nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem. K testování se navíc předpokládá, že rozdělení chyb je normální. Definují se omezující podmínky

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0; \quad \sum_{j=1}^{M} \beta_j = 0; \quad \sum_{i=1}^{N} \tau_{ij} = 0; \quad \sum_{j=1}^{M} \tau_{ij} = 0 \; .$$

V případě pouze aditivního působení jednotlivých faktorů je $\tau_{ij} = 0$ pro všechna $i = 1, ..., N$ a $j = 1, ...,M$. Odhady parametrů μ, α_i, β_j lze pak určit ze vztahů

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N\,M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} y_{ij} \;, \quad \hat{\alpha}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} y_{ij} - \hat{\mu} \;, \quad \hat{\beta}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{ij} - \hat{\mu} \; .$$

Pro rezidua $\hat{e}_{ij}$ platí $\hat{e}_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j$. K určení interakcí můžeme využít skutečnosti, že $\tau_{ij} = E(y_{ij}) - \mu - \alpha_i - \beta_j$ a pro odhad interakcí platí přibližně $\hat{\tau}_{ij} \approx \hat{e}_{ij}$.

Pak lze snadno identifikovat ***Tukeyův model*** interakce. Platí-li tento model, vyjde na grafu $\hat{e}_{ij}$ vs. $\hat{\alpha}_i\,\hat{\beta}_j$ lineární trend. Ze směrnice odpovídající regresní přímky se odhadne parametr C. Platí pro něj výraz:

$$\hat{C} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \hat{e}_{ij}\,\hat{\alpha}_i\,\hat{\beta}_j}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \hat{\alpha}_i^2\,\hat{\beta}_j^2} \; .$$

Graf $\hat{e}_{ij}$ vs. $\hat{\alpha}_i\,\hat{\beta}_j / \hat{\mu}$ se označuje jako graf *neaditivity*. Pokud vyjde v tomto grafu nenáhodný trend, znamená to, že je třeba uvažovat interakce.

Analýza rozptylu pro dvojné třídění s interakcí Tukeyova typu

Součet čtverců pro	**Stupně volnosti**	**Průměrný čtverec**	**Kritérium F**

Faktor *A*, $S_A = M\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2$	*N - 1*	$M_A = S_A/(N-1)$	$F_A = M_A/M_{AB}$
Faktor *B*, $S_B = N\sum_{j=1}^{M}\beta_j^2$	*M - 1*	$M_B = S_B/(M-1)$	$F_B = M_B/M_{AB}$
Interakce (Tukey)	*1*	$M_T = S_T$	$F_T = M_T/M_E$
Reziduální, $S_R = S_{AB}\text{-}S_T$	*N M - N - M*	$M_E = S_R/(NM\text{-}N\text{-}M)$	-
Celkový, $S_C = \sum_{(i)}\sum_{(j)}(\hat\mu - y_{ij})^2$	*N M - 1*	-	-

V tabulce představuje S_T součet čtverců odchylek odpovídající Tukeyově interakci

$$S_T = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} y_{ij}\,\hat\alpha_i\,\hat\beta_j\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\hat\alpha_i^2\,\hat\beta_j^2}\ .$$

Symbol S_{AB} označuje reziduální součet čtverců pro případ bez interakcí

$$S_{AB} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(y_{ij} - \hat\mu - \hat\alpha_i - \hat\beta_j)^2\ .$$

Odpovídající průměrný čtverec je $M_{AB} = \dfrac{S_{AB}}{(N-1)(M-1)}$. Hodnota M_{AB} je nevychýleným odhadem rozptylu σ^2. Pomocí F-kritéria lze opět provádět statistické testy. Začíná se testováním nulové hypotézy H_0: "*Tukeyova interakce je nevýznamná*", pro kterou lze použít testační statistiku F_T. Za předpokladu platnosti nulové hypotézy H_0 má tato testační statistika F-rozdělení s 1 a ($N\,M$ - N - M) stupni volnosti. Pokud nelze tuto hypotézu zamítnout, testuje se nulová hypotéza H_0: $\alpha_i = 0$, $i = 1, ..., N$, (efekty řádků čili faktoru A jsou nevýznamné) pomocí statistiky F_A nebo nulová hypotéza H_0: $\beta_j = 0, j = 1, ..., M$, (efekty sloupců čili faktoru B jsou nevýznamné) pomocí statistiky F_B. Obě tyto testační statistiky jsou uvedeny v tabulce. Za předpokladu platnosti hypotézy H_0 má statistika F_A Fisherovo-Snedecorovo F-rozdělení s $(N - 1)$ a $(N - 1)(M - 1)$ stupni volnosti a statistika F_B také F-rozdělení s $(M - 1)$ a $(N - 1)(M - 1)$ stupni volnosti. Pokud však vyjde F_T vyšší než odpovídající kvantil F-rozdělení, je efekt Tukeyovy interakce významný.

Friedmanův pořadový test. V případě nenormality a heteroskedasticity se aplikuje tento neparametrický test, kdy původní data jsou nahrazena svými pořadími. V experimentu s N úrovněmi faktoru A v N řádcích a M úrovněmi faktoru B v M sloupcích matice o rozměru $N \times M$ se užije *Friedmanovo testační kritérium* Q dle vzorce

$$Q = (M-1)\,\frac{12\sum_{i=1}^{M}R_i^2 - 3N^2M(M+1)^2}{N\,M(M^2-1)^2 - \sum_{i=1}^{M}(t^3 - t)}\ ,$$

kde data v každém ze N řádků jsou nahražena pořadím. Pořadí jsou sečtena pro každý ze M sloupců. Tato suma pořadí se značí R_i. Faktor t ve jmenovateli testačního kritéria Q představuje počet opakující se jedné hodnoty v průběhu řádku. Když je tento člen nulový, tak se vynechá. Testační kritérium Q má přibližně χ^2 rozdělení s M-1 stupni volnosti. Toto kritérium je blízké *Kendalově koeficientu dobré shody*. U těchto testů *musí* být faktor *A vždy náhodným faktorem* a faktor *B vždy pevným faktorem.*

Vícenásobné porovnávání MCP. Dá se použít jenom pro pevné faktory. Plánovaná porovnávání se formulují v pojmech sloupcových průměrů dle vzorce

$$C_i = \sum_{j=1}^{M} w_{ij}\, m_j \quad ,$$

kde M značí počet úrovní faktoru, m_j jsou průměry pro každou hladinu faktoru a w_{ij} představuje soubor M vah pro i-té porovnání. Porovnávací hodnota C_i se testuje pomocí t-testu. Všimněte si, že jestliže váha w_{ij} nabývá nuly při sumaci přes všechna j, porovnání budeme nazývat *kontrast průměrů.*

Porovnání může být zadáno jednoduše pomocí vah. Například, uvažujme faktor o 3 úrovních, kde 1. sloupec představuje *úroveň kontrolní*, druhý a třetí sloupec obsahují 2. a 3. úroveň faktoru. Porovnání zadáme pomocí vah: porovnání kontrolního 1. sloupce s 2. úrovní faktoru: -1, 1, 0. Porovnání kontrolního 1. sloupce se 3. úrovní faktoru: -1, 0, 1. Porovnání 2. úrovně s 3. úrovní: 0, -1, 1. Porovnání kontrolního 1. sloupce s průměrem 2. a 3. úrovně: -2, 1, 1.

Postup dvoufaktorové analýzy rozptylu bez opakování (ANOVA2P)

Pro dvoufaktorovou analýzu rozptylu a modelu s pevnými efekty v případě $n_{ij} = 1$, tedy bez opakování v cele, se předpokládá možnost interakce Tukeyova typu. Provádí se odhady parametrů, testy významnosti a ověření interakce, resp. transformace, vedoucí k aditivitě efektů. Vstupem je obdélníková tabulka dat pro $A_1, ..., A_N$ úrovní faktoru A (řádky) a $B_1, ..., B_M$ úrovní faktoru B (sloupce), $\{y_{ij}\}$, $j = 1, ..., N$ a $j = 1, ..., M$. Pro všechny testy je standardně uvažována hladina významnosti $\alpha = 0.05$. Postup obsahuje stejné kroky jako postup jednofaktorové analýzy rozptylu:

1. Příprava dat:

(a) Velikost výběru.

(b) Chybějící hodnoty.

(c) Typ dat.

(d) Odlehlé hodnoty.

2. Průměry a efekty úrovní: jsou vypočteny odhady parametrů: celkový průměr $\hat{\mu}$, řádkové efekty $\hat{\alpha}_i$, sloupcové efekty $\hat{\beta}_j$, interakční člen $\hat{\tau}_{ij}$ a Tukeyho konstanta C.

3. ANOVA tabulka: je sestavena tabulka ANOVA a provedeny testy významnosti faktorů A, B a AB.

(a) Za předpokladu normality a homoskedasticity: F-testy významnosti faktorů, resp. interakcí, včetně kombinovaných testů pro ověření celkové významnosti faktorů A, B.

(b) Za předpokladu nenormality nebo heteroskedasticity: Friedmanův pořadový neparametrický test.

4. Graf neaditivity: je kreslen graf neaditivity včetně určení optimální mocninné transformace $\hat{\lambda}$ pro zajištění aditivity. Lze zadat provedení analýzy pro transformovaná data, pokud jsou kladná.

5.3 Vyvážená dvoufaktorová analýza rozptylu

Slouží ke dvoufaktorové analýze rozptylu u vyvážených experimentů $n_{ij} = n$ a modelů s pevnými efekty. Je hledán optimální model ANOVA, odhadnuty jeho parametry a provedeny testy významnosti. Vstupem jsou pro úrovně $A_1, ..., A_N$ faktoru A a úrovně $B_1, ..., B_M$ faktoru B hodnoty $\{y_{ijk}\}$, $i = 1, ..., N$, $j = 1, ..., M$ a $k = 1, ..., n$. Pro všechny testy je standardně uvažována hladina významnosti $\alpha = 0.05$. Pro výpočet se užívá ANOVA2B (ADSTAT).

Pro tyto modely platí, že v každé cele je $n_{ij} = n$ pozorování. Odhadem μ_{ij} jsou aritmetické průměry

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} .$$

Pro odhady ostatních parametrů se použijí vztahy

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N\,M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\hat{\mu}_{ij} , \quad \hat{\alpha}_i = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu} , \quad \hat{\beta}_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu} ,$$

Rezidua vyjádříme vztahem $\hat{e}_{ijk} = y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j$. Podobně lze i v tomto případě definovat odhad interakcí $\hat{\tau}_{ij} = \hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j$. Povšimněme si, že tento vztah se liší od předešlé rovnice jen tím, že se místo veličin y_{ij} používá průměrů $\hat{\mu}_{ij}$. Pro ověření Tukeyova modelu interakce neaditivity lze vynášet graf $\hat{\tau}_{ij}$ vs. $\hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j$. Náhodný obrazec zde svědčí o aditivním působení obou faktorů. Součty čtverců modelu analýzy rozptylu pro obecný případ interakcí jsou uvedeny v tabulce. Odpovídající střední hodnoty (očekávané hodnoty) průměrných čtverců jsou

$$E(M_A) = \sigma^2 + \frac{n\, M \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2}{(N - 1)\, \sigma^2} = \sigma^2 + n\, M\, \sigma_A^2 \;,$$

$$E(M_B) = \sigma^2 + \frac{n\, N \sum_{j=1}^{M} \beta_j^2}{(M - 1)\, \sigma^2} = \sigma^2 + n\, N\, \sigma_B^2$$

a

$$E(M_{AB}) = \sigma^2 + \frac{n \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \tau_{ij}^2}{(N - 1)\,(M - 1)\, \sigma^2} = \sigma^2 + n\, \sigma_{AB}^2 \;.$$

Očekávaná hodnota $E(M_R) = \sigma^2$ ukazuje, že roztyl M_R je nevychýleným odhadem σ^2 rozptylu chyb. Rozptyly σ_A^2, σ_B^2 a σ_{AB}^2 odpovídají efektům řádků, sloupců a interakcí. Těchto vztahů lze využít i v případech, kdy se hledají odhady rozptylů příslušející faktorům a interakcím. Pak se místo středních hodnot *E(.)* dosazují přímo průměrné čtverce a místo rozptylu σ^2 reziduální rozptyl $\hat{\sigma}^2$. Důležité je, že průměrné čtverce nejsou přímo odhady odpovídajících rozptylů.

Také v případě analýzy rozptylu, definované ANOVA tabulkou se využitím statistik F_{AB}, F_B a F_A testuje, zda je možné považovat sloupcové a řádkové efekty, resp. interakce, za nevýznamné. Pro test nulové hypotézy H_0: $\tau_{ij} = 0$, $i = 1, ..., N$ a $j = 1, ..., M$, lze použít testační statistiku F_{AB}, která má za předpokladu platnosti hypotézy H_0 F-rozdělení s $\{(N - 1)(M - 1)\}$ a $\{M\, N\, (n - 1)\}$ stupni volnosti. Při testování významnosti řádkových efektů faktoru A je H_0: $\alpha_i = 0$, $i = 1, ..., N$. Pokud nulová hypotéza platí, má testační F_A statistika F-rozdělení s $(N - 1)$ a $\{M\, N(n - 1)\}$ stupni volnosti. Analogicky při testování významnosti sloupcových efektů faktoru B je H_0: $\beta_j = 0$, $j = 1, ..., M$. Pokud nulová hypotéza platí, má testační F_B statistika F-rozdělení s $(M - 1)$ a $\{M\, N\, (n - 1)\}$ stupni volnosti. Nevychýleným odhadem rozptylu je zde M_R.

Analýza rozptylu pro dvojné třídění a vyvážený experiment

Součet čtverců pro	**Stupně volnosti**	**Průměrný čtverec**	**Kritérium *F***
Faktor *A*			

$S_A = n\, M \sum_{i=1}^{N} \hat{\alpha}_i^2$	$N - 1$	$M_A = \dfrac{S_A}{N-1}$	$F_A = \dfrac{M_A}{M_R}$
Faktor *B*			
$S_B = n\, N \sum_{j=1}^{M} \hat{\beta}_j^2$	$M - 1$	$M_B = \dfrac{S_B}{M-1}$	$F_B = \dfrac{M_B}{M_R}$
Interakce *AB*			
$S_{AB} = n \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \hat{\tau}_{ij}^2$	$(N - 1)(M - 1)$	$M_{AB} = \dfrac{S_{AB}}{(N-1)(M-1)}$	$F_{AB} = \dfrac{M_{AB}}{M_R}$
Reziduální			
$S_R = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk} - \hat{\mu}_{ij})^2$	$M\, N\, (n - 1)$	$M_R = \dfrac{S_R}{M\, N\, (n-1)}$	-
Celkový			
$S_C = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk} - \hat{\mu})^2$	$M\, N\, n - 1$	-	-

Výhodou vyvážených experimentů je to, že jednotlivé složky modelů analýzy rozptylu jsou vzájemně nezávislé.

Postup vyvážené dvoufaktorové analýzy rozptylu (ANOVA2B)

Slouží ke dvoustupňové analýze rozptylu u vyvážených experimentů $n_{ij} = n$ a modelů s pevnými efekty. Je hledán optimální model ANOVA, odhadnuty jeho parametry a provedeny testy významnosti. Vstupem jsou pro úrovně A_1, ..., A_N faktoru A a úrovně B_1, ..., B_M faktoru B hodnoty $\{y_{ijk}\}$, $i = 1, ..., N$, $j = 1, ..., M$ a $k = 1, ..., n$. Pro všechny testy je standardně uvažována hladina významnosti $\alpha = 0.05$.

Postup obsahuje stejné kroky jako postup jednofaktorové analýzy rozptylu:

1. Příprava dat:

(a) Velikost výběru.

(b) Chybějící hodnoty.

(c) Typ dat.

(d) Odlehlé hodnoty.

2. Ověření výběrových předpokladů: z opakování v celách

(a) Náhodnost.

(b) Nezávislost.

(c) Normalita.

(d) Homoskedasticita.

3. Průměry a efekty úrovní: jsou vypočteny odhady: celkový průměr $\hat{\mu}$, řádkové efekty $\hat{\alpha}_i$, sloupcové efekty $\hat{\beta}_j$, interakční člen $\hat{\tau}_{ij}$ a Tukeyho konstanta C.

4. ANOVA tabulka: je sestavena tabulka ANOVA a provedeny testy významnosti faktorů A, B a AB.

(a) Za předpokladu normality a homoskedasticity: F-testy významnosti faktorů, resp. interakcí, včetně kombinovaných testů pro ověření celkové významnosti faktorů A, B.

(b) Za předpokladu nenormality nebo heteroskedasticity: Friedmanův pořadový test.

5. Grafy a diagramy: je kreslena závislost výběrových směrodatných odchylek s_{ij} v celách na průměrech $\hat{\mu}_{ij}$. Pokud je nalezena monotónní závislost, lze zadat vhodnou transformaci, ve které se provede opakovaná analýza. Je konstruován rankitový graf pro rezidua $\hat{e}_{ijk}$.

5.4 Nevyvážená dvoufaktorová analýza rozptylu

Pro nevyvážené modely platí, že v (i, j)-té cele je n_{ij} pozorování. Pokud je experiment velmi špatně vyvážený, což znamená, že rozdíly mezi jednotlivými hodnotami n_{ij} jsou řádově v desítkách, je analýza rozptylu komplikovanější. Analýza rozptylu se pak provádí s využitím programů pro lineární regresi, kdy se modely ANOVA uvažují jako speciální regresní modely s vysvětlujícími proměnnými, které nabývají pouze hodnot 0 nebo 1.

Pro praktické účely se osvědčuje použití *přibližného rozkladu celkového součtu čtverců*. Začíná se výpočtem průměrů

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{1}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k} y_{ijk}$$

pro všechny cely. Z těchto hodnot se dá odhadnout reziduální součet čtverců

$$S_R = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{n_k} (y_{ijk} - \hat{\mu}_{ij})^2 \; .$$

Pro výpočet dalších složek rozkladu celkového součtu čtverců se používá $\hat{\mu}_{ij}$, o kterých se uvažuje, že jsou určeny z ekvivalentního počtu pozorování n^*, definovaného vztahem

$$n^* = \left[\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{n_{ij}} \right]^{-1} .$$

Analýza rozptylu se pak provádí stejně jako u vyvážených experimentů s tím, že jsou jednotlivé součty čtverců definovány vztahy

$$S_A = n^* M \sum_{i=1}^{N} (\hat{\mu}_i - \hat{\mu})^2 \quad \text{s } (N - 1) \text{ stupni volnosti,}$$

$$S_B = n^* N \sum_{j=1}^{M} (\hat{\mu}_j - \hat{\mu})^2 \quad \text{s } (M - 1) \text{ stupni volnosti}$$

a $$S_{AB} = n^* \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (\hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j + \hat{\mu})^2 \quad \text{s } (N - 1)(M - 1) \text{ stupni volnosti.}$$

V těchto vztazích je použito označení

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\hat{\mu}_{ij}, \qquad \hat{\mu}_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\mu}_{ij}, \qquad \hat{\mu} = \frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\hat{\mu}_{ij}.$$

Součet $S_A + S_B + S_{AB} + S_R$ zde již není přesně roven S_C, ale rozdíly jsou poměrně malé. Testování hypotéz o řádkových a sloupcových efektech nebo interakcích se provádí stejně jako u vyvážených experimentů.

V případě více opakování v jednotlivých celách lze pro každou z nich určit výběrový rozptyl s_{ij}^2 a pomocí grafu s_{ij}^2 vs. $\hat{\mu}_{ij}$ testovat případnou závislost rozptylu na střední hodnotě (heteroskedasticitu).

Postup nevyvážené dvoufaktorové analýzy rozptylu (ANOVA2U)

Slouží ke dvoufaktorové analýze rozptylu u nevyvážených experimentů n_{ij} a modelů s pevnými efekty. Je hledán optimální model ANOVA, odhadnuty jeho parametry a provedeny testy významnosti. Vstupem jsou pro úrovně $A_1, ..., A_N$ faktoru A a úrovně $B_1, ..., B_M$ faktoru B hodnoty $\{y_{ijk}\}$, $i = 1, ..., N$, $j = 1, ..., M$ a $o = 1, ..., O$. Pro všechny testy je standardně uvažována hladina významnosti $\alpha = 0.05$.

Postup obsahuje stejné kroky jako postup jednofaktorové analýzy rozptylu:

1. Příprava dat:

(a) Velikost výběru.

(b) Chybějící hodnoty.

(c) Typ dat.

(d) Odlehlé hodnoty.

2. Ověření výběrových předpokladů: z opakování v celách

(a) Náhodnost.

(b) Nezávislost.

(c) Normalita.

(d) Homoskedasticita.

3. Průměry a efekty úrovní: jsou vypočteny odhady: celkový průměr $\hat{\mu}$, řádkové efekty $\hat{\alpha}_i$, sloupcové efekty $\hat{\beta}_j$, interakční člen $\hat{\tau}_{ij}$ a Tukeyho konstanta C.

4. Tabulka ANOVA: je sestavena tabulka ANOVA a provedeny testy významnosti faktorů A, B a AB.

(a) Za předpokladu normality a homoskedasticity: F-testy významnosti faktorů, resp. interakcí, včetně kombinovaných testů pro ověření celkové významnosti faktorů A, B.

(b) Za předpokladu nenormality nebo heteroskedasticity: Friedmanův pořadový neparametrický test.

5. Grafy a diagramy: je kreslena závislost výběrových směrodatných odchylek s_{ij} v celách na průměrech $\hat{\mu}_{ij}$. Pokud je nalezena monotónní závislost, lze zadat vhodnou transformaci, ve které se provede opakovaná analýza. Je konstruován rankitový graf pro rezidua $\hat{e}_{ijk}$.

5.5 Opakovatelnost a reprodukovatelnost (O&R analýza)

Populárně zvané *cejchování* se týká ověření přesnosti, zda dotyčná technika měření je co do přesnosti vhodně zvolena, a tím pro experimentální proces přiměřená. Je-li proměnlivost měření malá ve srovnání s proměnlivostí experimentálního procesu říkáme, že postup měření je adekvátní nebo odpovídající. Není-li, je třeba techniku měření zlepšit tak, aby vůbec mohla uspokojivě monitorovat experimentální proces. Jsou-li, například, míry opracovaného výrobku uváděny v toleranci milimetrů, nelze použít techniku měřením měřidlem, které má čtení jenom v centimetrech.

O&R analýza rozděluje celkovou proměnlivost do dvou složek: 1. *Složky měřicí techniky* a 2. *složky procesní,* týkající se vlastního experimentálního procesu. Proměn-livost složky měření je pak dále rozdělena: 1. Do *složky operátora O*, což vlastně představuje *reprodukovatelnost*, a 2. *složky měřicí techniky V*, což je *opakovatelnost*. Je důležité zdůraznit, že O&R analýza se týká jenom přesnosti složky měření. Data pro tuto analýzu pocházejí z experimentu, zvláště postaveného jenom a jenom k tomuto účelu. Není proto možné kombinovat O&R analýzu s ostatními experimenty v laboratoři. Platí *obecné pravidlo:* náhodné chyby měření by neměly být větší než jedna desetina rozptylu procesu. O&R analýza zjišťuje, jaká část pozorovaného rozptylu procesu náleží rozptylu měřicího systému. ANOVA rozděluje ještě reprodukova-telnost na vliv operátora a interakci operátor-vzorek.

Analýzu rozptylu vyšetřovaného experimentálního plánu vystihuje model ANOVA

$$y_{ijk} = \mu + V_i + O_j + (VO)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad ,$$

kde $i = 1, ..., I$, $j = 1, ..., J$, $k = 1, ..., K$ a V_i, O_j, $(VO)_{ij}$, ε_{ijk} jsou nezávislé, normální, náhodné proměnné se střední hodnotou nula a rozptyly σ_V^2, σ_O^2, σ_{VO}^2 a σ_ε^2. Tyto rozptyly jsou často označovány jako *složky rozptylu* nazývané také *rozptylové komponenty*. V tomto modelu ANOVA shodném s modelem ANOVA pro vyváženou dvoufaktorovou analýzu rozptylu značí písmeno *V náhodný vzorek*, písmeno *O* udává *operátora* a písmeno ε *náhodnou chybu.* Dále v modelu označíme složku rozptylu σ_ε^2 za *opakovatelnost,* dále složku rozptylu $\gamma_1 = \sigma_O^2 + \sigma_{VO}^2$ za *reprodukovatelnost*, složku rozptylu $\gamma_2 = \sigma_O^2 + \sigma_{VO}^2 + \sigma_\varepsilon^2$ za *celkovou proměnlivost měření*, která se také někdy nazývá O&R hodnota. *Proměnlivost procesu od vzorku k vzorku* představuje další složku rozptylu σ_V^2. Poměr, který porovnává dvě složky rozptylu, a sice proměnlivost experimentálního procesu vůči proměnlivosti samotného měření je dán vzorcem

$$\delta = \frac{\sigma_V^2}{\sigma_O^2 + \sigma_{VO}^2 + \sigma_\varepsilon^2} \quad .$$

V literatuře je popsána řada kritérií k posouzení O&R hodnot. V automobilovém průmyslu se užívá kritérium *SNR* (**S**ignal-to-**N**oise **R**atio) *poměr signálu vůči šumu*, vyčíslené vzorcem $SNR = \sqrt{\delta}$ a dále *rozhodčí kategorie* $RK = \sqrt{(2\delta)}$. Existují dvě populární míry k porovnání rozptylu vůči toleranci, v nichž se za toleranci bere rozdíl horní a dolní toleranční meze *HSL - DSL*. Jsou to jednak *chyba měření M* dle vzorce

$$M = 3\,\frac{\sqrt{\sigma_O^2 + \sigma_{VO}^2 + \sigma_\varepsilon^2}}{HSL - DSL}\,100\% \quad ,$$

a dále *poměr přesnosti vůči toleranci PT = 2M*. Obě kritéria jsou obvykle vyčíslována spolu se svými intervaly spolehlivosti. Cílem analýzy je vyčíslit tyto hodnoty a rozhodnout, zda padnou do předem určeného intervalu.