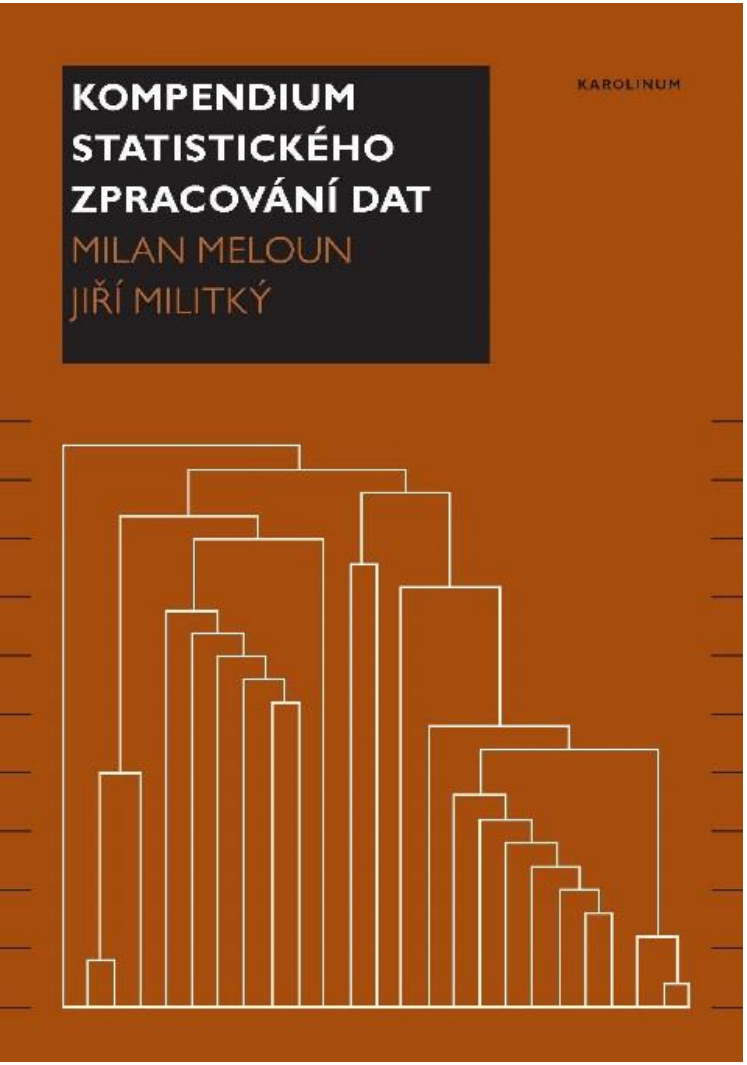
Uni- and multi-dimensional parametric tests for comparison of sample results

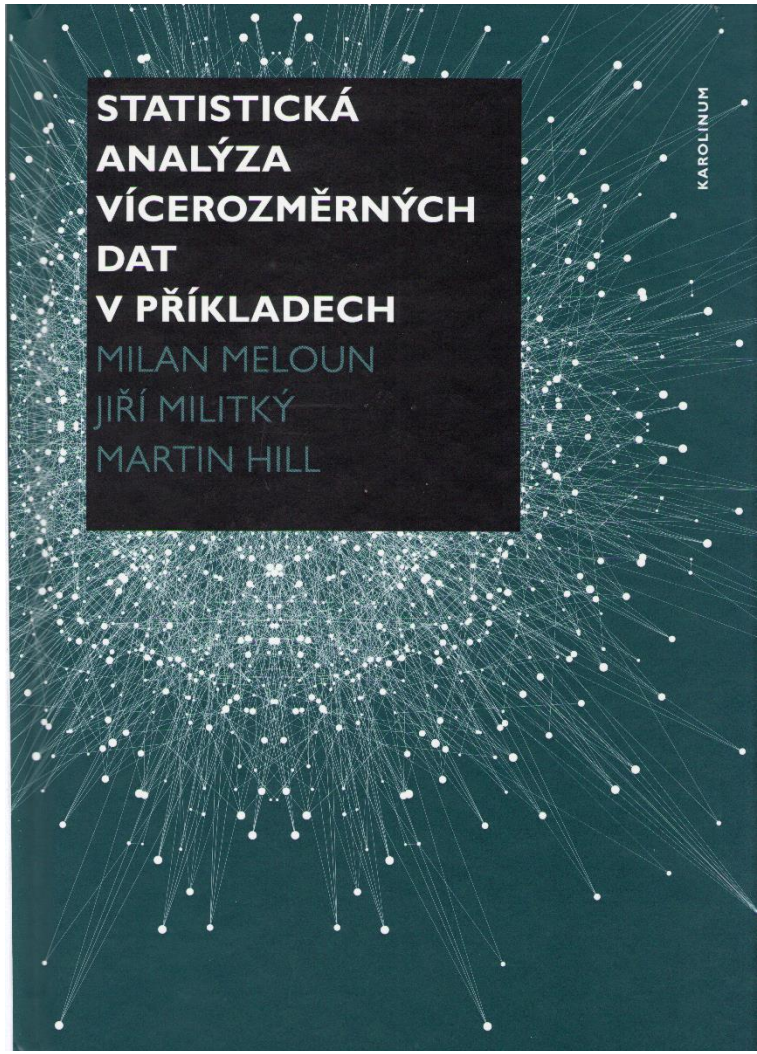
Jedno- a více-rozměrné parametrické testy k porovnání výsledků

Prof. RNDr. Milan Meloun, DrSc.
Katedra analytické chemie,
Universita Pardubice, 53210 Pardubice
Email: milan.meloun@upce.cz
Telefon: 466037026

Literatura



M. Meloun, J. Militký: **Kompendium statistického zpracování dat,** Karolinum Praha 2012, 3. vydání, včetně DVD s databazí dat 1700, 985 stran.



M. Meloun, J. Militký, M. Hil: **Statistická analýza vícerozměrných dat v příkladech,** Karolinum Praha 2017, 3. vydání, ISBN 978-80-246-3618-4, včetně DVD s databazí dat řešených úloh, 757 stran.

Vyšetření předpokladů o výběru
Examination of the sample assumptions

Outliers
Odlehlé body

Symmetry
Symetrie

Heteroscedasticity
Konstantní rozptyl

Sample size
Velikost výběru

Testování statistické hypotézy

Postup:

1. Formulace nulové H_0 a alternativní hypotézy H_A.
2. Volba hladiny významnosti α.
3. Volba testační statistiky, např. t.
4. Určení kritického oboru testové charakteristiky, např. $t_{1-\alpha/2}(n-1)$,
5. Vyčíslení testační statistiky a jejích kvantilů.
6. Rozhodnutí, zda
   a) Zamítnout hypotézu H_0 a přijmout H_A, jestliže testační statistika padne do kritického oboru,
   b) Nezamítnout hypotézu H_0, jestliže testační statistika nepadne do kritického oboru.

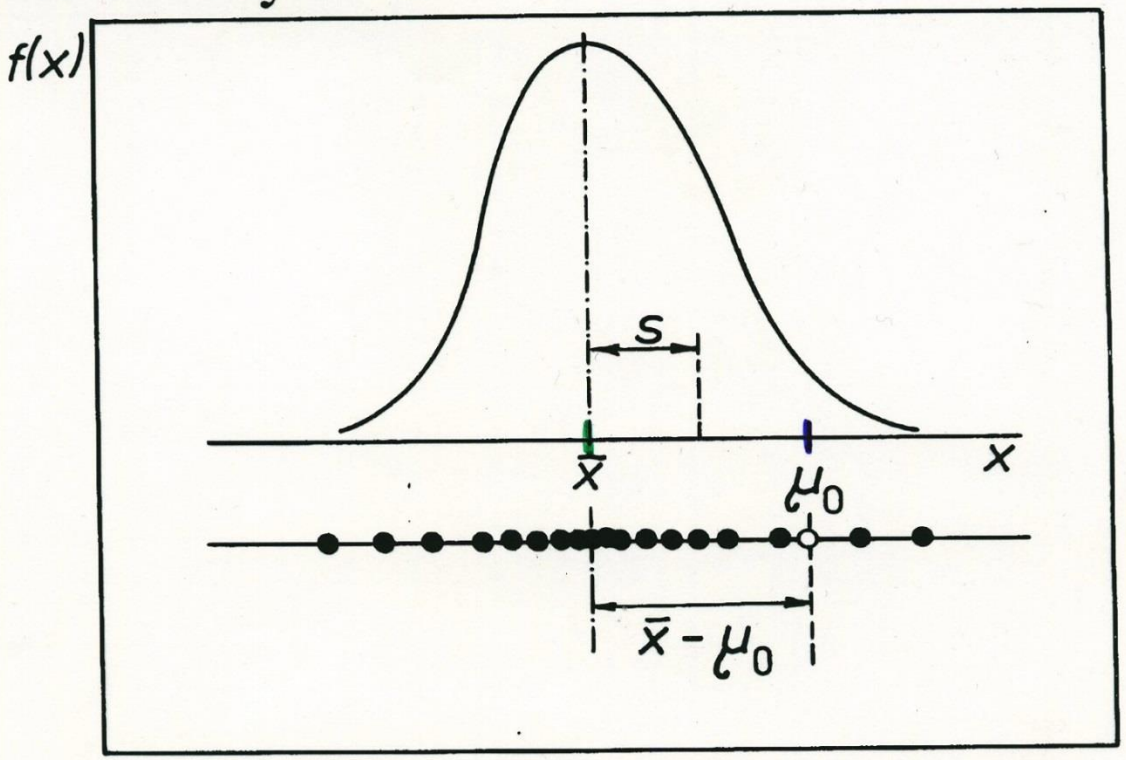
Study case I

Parametric tests for samples of uni-dimensional data

Porovnání dvou vektorů dat

Testy o parametrech jednoho souboru

Testy hypotéz o parametrech μ a σ^2 normálního rozdělení: soubor s $N(\mu, \sigma^2)$, výběr rozsahu n a vypočteme průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku s.



Zadání testu správnosti výsledku

Test of the result accuracy

Evropa: porovnání t vůči kritické hodnotě $t_{(1-\alpha/2)}(n-1)$

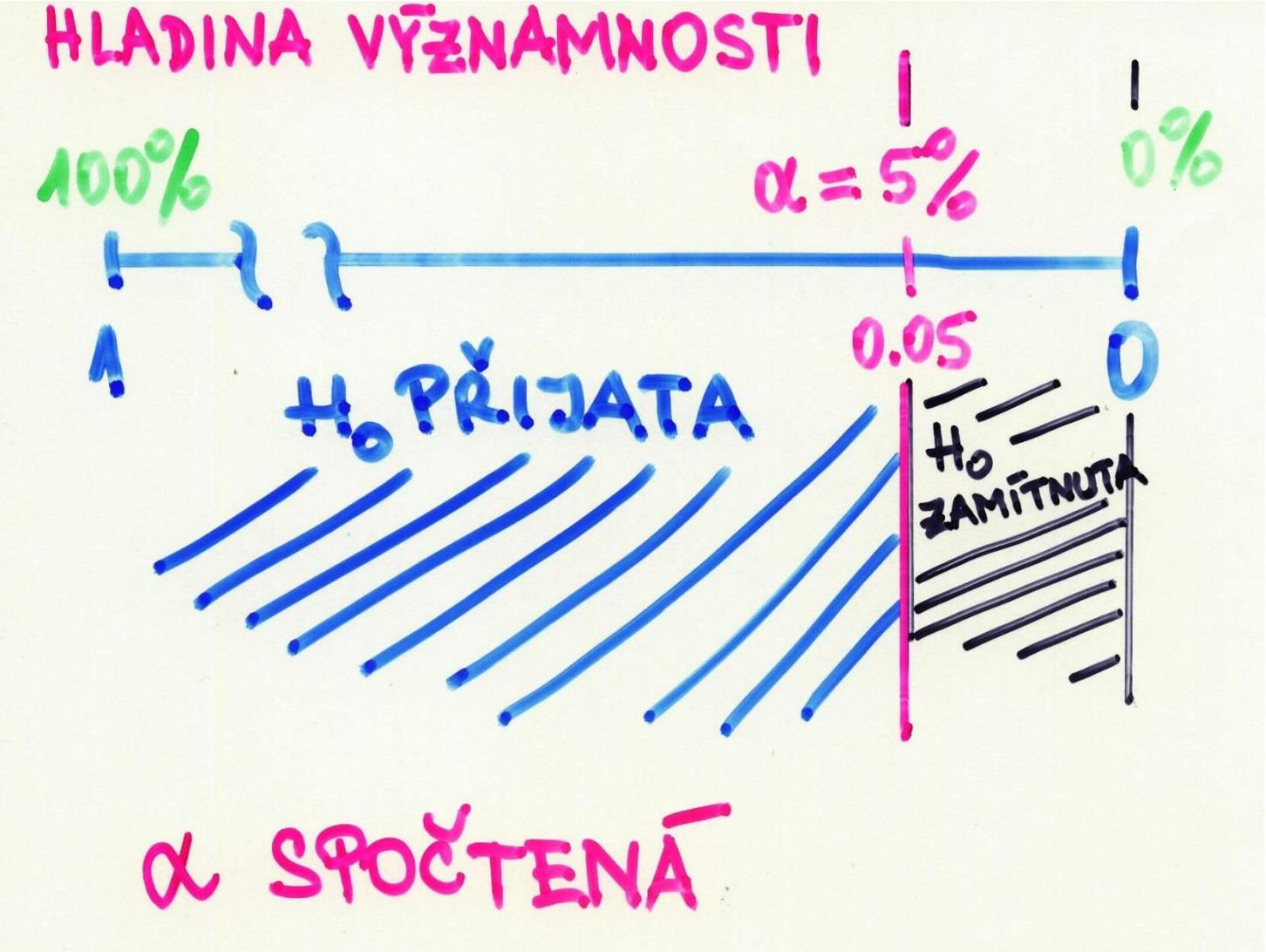
Formulace hypotéz: H_0: $\mu = \mu_0$ *vs.* H_A: $\mu \neq \mu_0$

Testová statistika: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$

Testování střední hodnoty μ a rozptylu σ^2: výběr normálního rozdělení, kde $t_\alpha(n-1)$ je kvantil Studentova a $\chi^2_\alpha(n-1)$ je kvantil χ^2-rozdělení,

Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testační charakteristika	Kritický obor
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$t = (x - \mu_0)\sqrt{n}/s$	$t \geq t_{(1-\alpha)}(n-1)$ $t < t_\alpha(n-1)$ $\lvert t \rvert \geq t_{(1-\alpha/2)}(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma^2_0$	$\sigma^2 > \sigma^2_0$ $\sigma^2 < \sigma^2_0$ $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$	$\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma^2_0$	$\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2 < \chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leq \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

USA: porovnání *spočtené hladiny p* vůči *zadané hladině významnosti α*



Postup při testu shodnosti dvou základních souborů:

1. Ověření normálního rozdělení obou souborů: testy a statistické diagnostiky k ověření předpokladů o výběru,

2. Shoda rozptylů:

2.1 Fisher-Snedecorovým F-testem, **F1-test**

2.2 Modifikovaným Fisher-Snedecorovým F-testem, **F2-test**

2.3 Jackknife test F_J

3. Shoda středních hodnot dvou souborů

3.1 Klasický Studentův t-test T_1 pro homoskedasticitu, **T1-test**

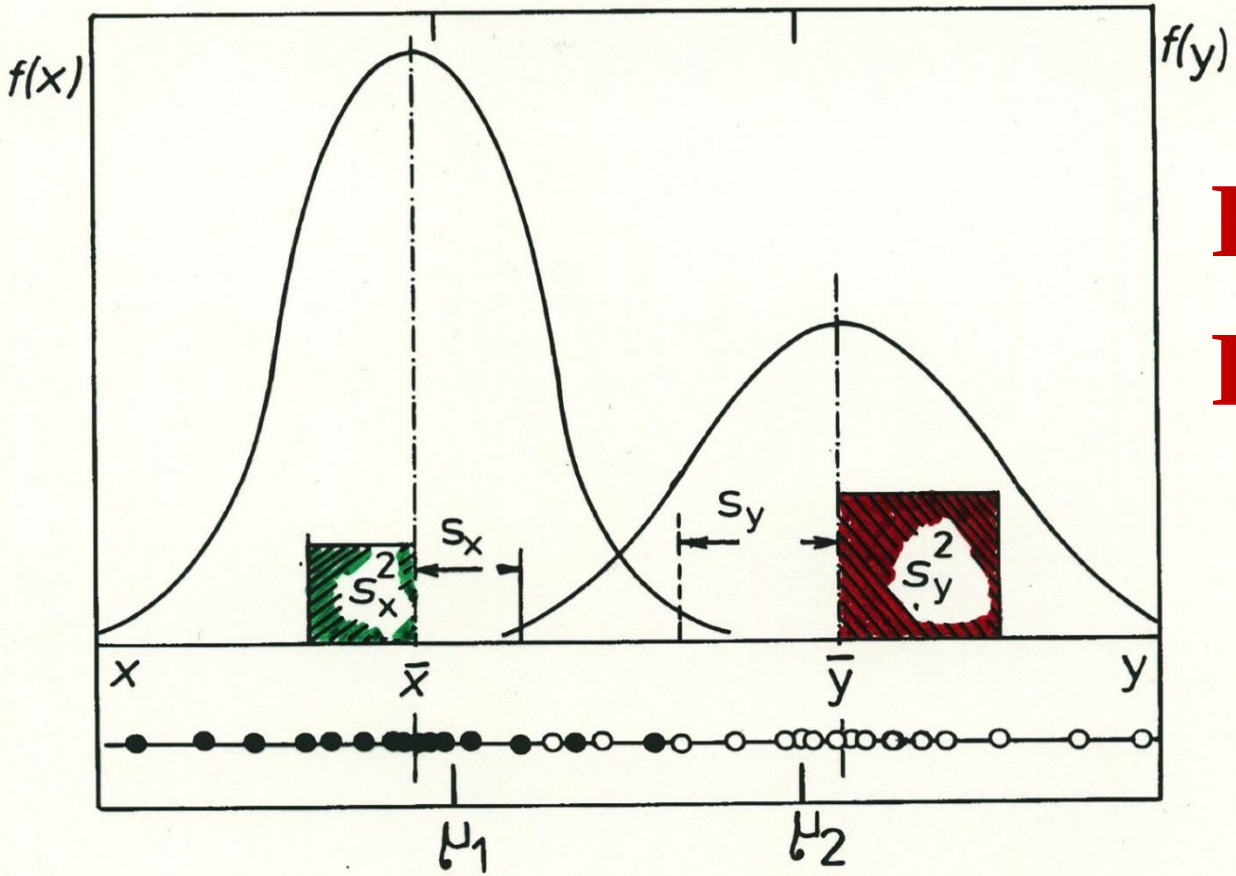
3.2 Klasický Studentův t-test T_2 pro heteroskedasticitu, **T2-test**

3.3 Modifikovaný Studentův t-test T_3 pro výběry, odchýlené od normálního rozdělení a lišící se v šikmostech, **T3-test**

3.4 Robustní Jackknife test polohy T_4 pro homoskedasticitu,

3.5 Robustní Jackknife test polohy T_5 pro heteroskedasticitu,

Testy shody rozptylů



Test shodnosti výsledků při nestejných rozptylech

F1-test

F2-test

Test of equal variances (homoscedasticity)

1. Klasický Fisher-Snedecorův F-test:

Formulace hypotéz: H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ ***vs.*** H_A: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Předpoklad: oba výběry jsou nezávislé a pocházejí z normálního rozdělení.

Testovací kritérium: má tvar

F1-test

$$F = \max\left(\frac{s_x^2}{s_y^2}, \frac{s_y^2}{s_x^2}\right)$$

Testování: $F > F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$, je H_0 o shodě rozptylů na hladině významnosti α zamítnuta.

(V opačném případě se pořadí stupňů volnosti zamění.)

2. Modifikovaný Fisher-Snedecorův F-test:

Formulace hypotéz: H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ ***vs.*** H_A: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Předpoklad: obě rozdělení mají jinou špičatost než odpovídá normálnímu,

Testovací kritérium: má tvar

F2-test

$$F = \max\left(\frac{s_x^2}{s_y^2}, \frac{s_y^2}{s_x^2}\right)$$

Kvantil $F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$: se stupni volnosti ν_1 a ν_2 dle

$$\nu_1 = \frac{n_1 - 1}{1 + \frac{\hat{g}_{2c}}{2}}$$

$$\nu_2 = \frac{n_2 - 1}{1 + \frac{\hat{g}_{2c}}{2}}$$

kde $$\hat{g}_{2c} = \frac{2(n_1 + n_2)\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^4 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^4\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^2\right]^2} - 3$$

Testování: $F > F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$, je H_0 o shodě rozptylů na hladině významnosti α zamítnuta.

(V opačném případě se pořadí stupňů volnosti zamění.)

Testy shody středních hodnot

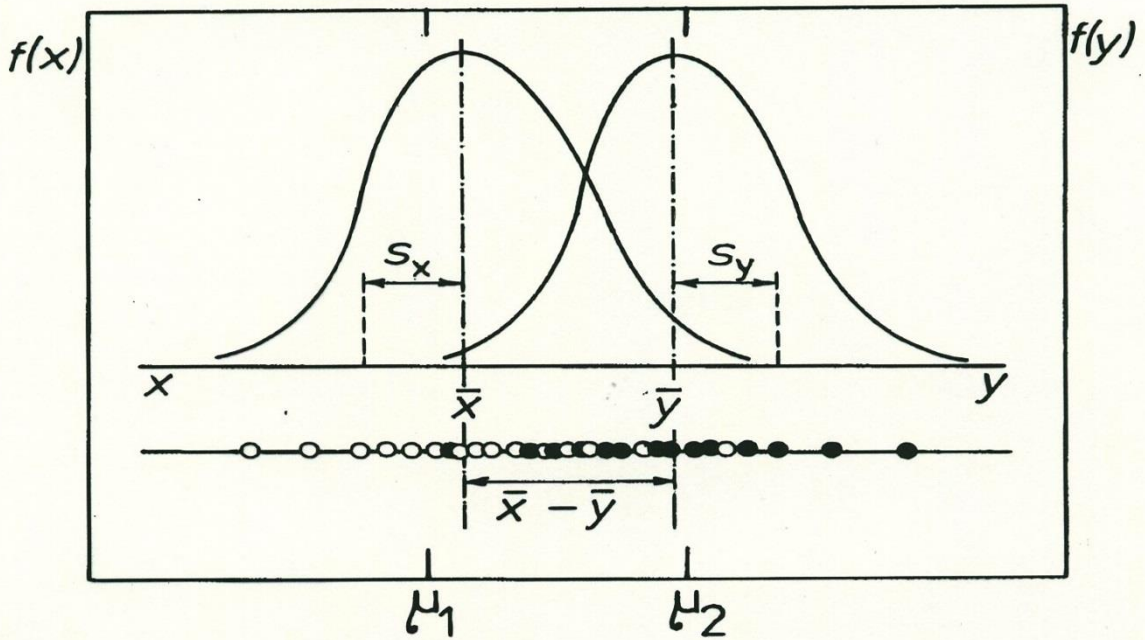
("testy shodnosti")

Klasické testy vycházejí z předpokladů:

a) výběry $\{x_i\}$, $i = 1, \ldots, n_1$, a $\{y_j\}$, $j = 1, \ldots, n_2$ jsou vzájemně nezávislé;

b) rozdělení obou výběrů je normální,

$$x_i \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \text{ a } y_j \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$



Test shodnosti výsledků při stejných rozptylech

T1-test

T2-test

T3-test

Studentův t-test

a) **Formulace hypotéz:** $H_0: \mu_x = \mu_y$ ***vs.*** $H_A: \mu_x \neq \mu_y$,

b) **Testovací kritérium:** má tvar dle následujících podmínek

1. Je-li $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ **(homoskedasticita),** má tvar **T1-test**

$$T_1 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{(n_1 - 1)\, s_x^2 + (n_2 - 1)\, s_y^2}} \sqrt{\frac{n_1\, n_2\, (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

Testování: $T_1 > t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

2. Je-li $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ **(heteroskedasticita)**, má tvar **T2-test**

$$T_2 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}}$$

která má Studentovo rozdělení s ***"ekvivalentními"*** stupni volnosti ν

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_x^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{s_y^4}{n_2^2(n_2 - 1)}}$$

Testování: $T_2 > t_{1-\alpha/2}(\nu)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

3. Oba výběry se odchylují od normality: má tvar

T3-test

$$T_3 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}| + C + D(\bar{x} - \bar{y})^2}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}}$$

kde

$$C = \frac{1}{6} \frac{\frac{\hat{g}_{1x}}{n_1^2} \frac{s_x^3}{\sqrt{n_1}} - \frac{\hat{g}_{1y}}{n_2^2} \frac{s_y^3}{\sqrt{n_2}}}{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}$$

$$D = \frac{1}{3} \frac{\frac{\hat{g}_{1x}}{n_1^2} \frac{s_x^3}{\sqrt{n_1}} - \frac{\hat{g}_{1y}}{n_2^2} \frac{s_y^3}{\sqrt{n_2}}}{\left[\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right]^2}$$

kde $\hat{g}_{1x}$ a $\hat{g}_{1y}$ jsou výběrové šikmosti.

K užití kvantilů Studentova rozdělení pro hladiny významnosti α, je třeba přeformulovat testovací kritérium T_3 do tvaru

$$T_3 = T_2 + B_x - B_y$$

kde

$$B_x = \frac{\dfrac{\hat{g}_{1x}\, s_x^3}{6\, n_1^2 \sqrt{n_1}\left[\dfrac{s_x^2}{n_1} + \dfrac{s_y^2}{n_2}\right]} + \dfrac{\hat{g}_{1x}\, s_x^2\, (\bar{x} - \bar{y})^2}{3\, n_2^2 \sqrt{n_2}\left[\dfrac{s_x^2}{n_1} + \dfrac{s_y^2}{n_2}\right]}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{n_1} + \dfrac{s_y^2}{n_2}}}$$

a B_y se vyčíslí analogicky, pouze šikmost $\hat{g}_{1x}$ se nahradí hodnotou $\hat{g}_{1y}$, rozptyl σ_x^2 hodnotou σ_y^2 a rozsah n_1 hodnotou n_2.

Testování: $T_3 > t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

Test T_3 je robustní vůči sešikmení výběrových rozdělení i vůči heteroskedasticitě $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Příklad 3.32 ***Rozdíl mezi gravimetrickým a titračním stanovením P_2O_5 v kostní dřeni***

K určení obsahu oxidu fosforečného v kalcinované kostní dřeni byla použita gravimetrická (G) a titrační (T) metoda.

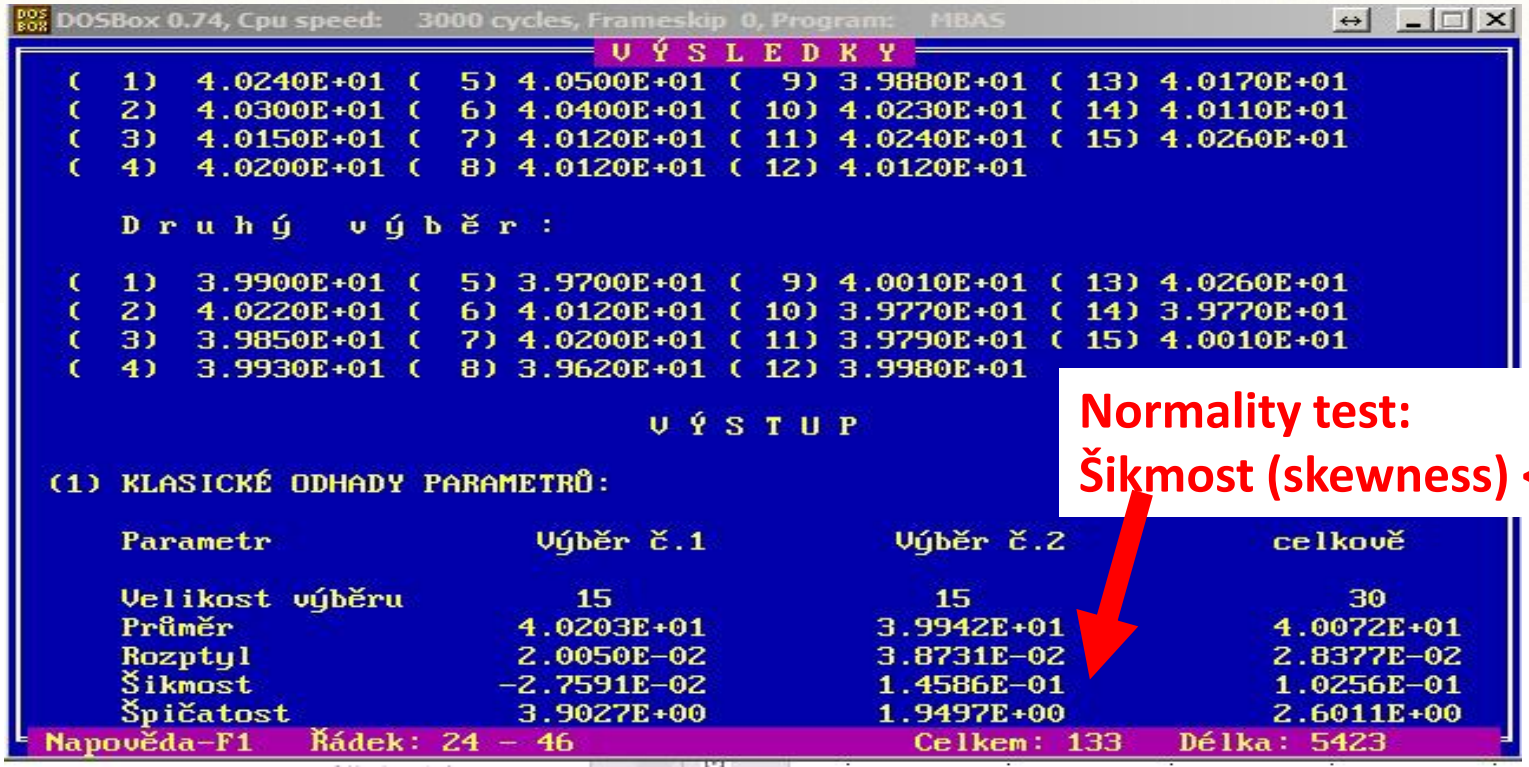
Ze získaných 15 hodnot určete, zda je rozdíl mezi oběma metodami významný.

Data: n = 15

G : 40.24, 40.30, 40.15, 40.20, 40.50, 40.40, 40.12, 40.12, 39.88, 40.23, 40.24, 40.12, 40.17, 40.11, 40.26.

T : 39.90, 40.22, 39.85, 39.93, 39.70, 40.12, 40.20, 39.62, 40.01, 39.77, 39.79, 39.98, 40.26, 39.77, 40.01.

Řešení:



Normality test:
Šikmost (skewness) < +-0.3

```
V Y S L E D K Y
(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

    Průměr              :  4.0203E+01     Rozptyl   :  2.0048E-02
    Směrodatná odchylka:  1.4159E-01     Šikmost   : -2.7478E-02
    Špičatost           :  3.9034E+00

(2) TEST NORMALITY:

    Tabulkový kvantil  Chi^2(1-alfa,2) :  5.9915E+00
    Chi^2-statistika                   :  2.6846E+00
        Závěr: Předpoklad normality přijat
    Vypočtená hladina významnosti      :  2.6125E-01

(3) TEST NEZÁVISLOSTI:

    Tabulkový kvantil  t(1-alfa/2,n+1) :  2.1199E+00
    Test autokorelace                  :  2.7791E+00
        Závěr: Předpoklad nezávislosti zamítnut
    Vypočtená hladina významnosti      :  6.7029E-03
```

JB-test normality of the sample A

Sample A:
Normality is accepted

```
V Ý S L E D K Y
(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

    Průměr              :  3.9942E+01     Rozptyl   :  3.8730E-02
    Směrodatná odchylka:  1.9680E-01     Šikmost   :  1.4597E-01
    Špičatost           :  1.9498E+00

(2) TEST NORMALITY:

    Tabulkový kvantil  Chi^2(1-alfa,2) :  5.9915E+00
    Chi^2-statistika                   :  8.2687E-01
        Závěr: Předpoklad normality přijat
    Vypočtená hladina významnosti      :  6.6137E-01

(3) TEST NEZÁVISLOSTI:

    Tabulkový kvantil  t(1-alfa/2,n+1) :  2.1199E+00
    Test autokorelace                  :  1.5304E+00
        Závěr: Předpoklad nezávislosti přijat
    Vypočtená hladina významnosti      :  7.2725E-02
```

JB-test normality of the sample B

Sample B:
Normality is accepted

```
V Ý S L E D K Y
(2) TEST HOMOGENITY ROZPTYLU (hypotéza H0: s1^2=s2^2):

    Fisher-Snedecor F-test:

    Počet stupňů volnosti Df1                          :  14
                          Df2                          :  14
    Tabulkový kvantil F(1-alfa/2,Df1,Df2)              :  2.9786E+00
    F-statistika                                       :  1.9318E+00
        Závěr: Rozptyly se považují za shodné, H0 přijata
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.115


    Korigovaný F-test :
    Počet stupňů volnosti Df1                          :  17
                          Df2                          :  17
    Tabulkový kvantil F(1-alfa/2,Df1,Df2)              :  2.6733E+00
    F-statistika                                       :  1.9318E+00
        Závěr: Rozptyly se považují za shodné, H0 přijata
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.092
```

F1 a F2-test of the homoskedasticity

Conclusion: F1-test Sample variances are equal

```
V Ý S L E D K Y
(3) TEST SHODY PRŮMĚRU (hypotéza H0: μ1=μ2):

    Shoda rozptylů se dá předpokládat.

    t-test(pro shodné rozptyly)

    Počet stupňů volnosti Df1                          :  28
    Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1)                  :  2.0484E+00
    t-statistika                                       :  4.1640E+00
        Závěr: Průměry se považují za rozdílné, H0 zamítnuta
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.000

    t-test(pro různé rozptyly)

    Počet stupňů volnosti Df1                          :  27
    Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1)                  :  2.0518E+00
    t-statistika                                       :  4.1640E+00
        Závěr: Průměry se považují za rozdílné, H0 zamítnuta
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.000
```

T1-test a T2-test of the means equality

Conclusion: T1-test Sample means are not equal

QC-EXPERT

Porovnání dvou výběrů

Název úlohy :	P332	
Hladina významnosti :	0,050	
Porovnávané sloupce :	P332a	P332b
Počet dat :	15	15
Průměr :	40,203	39,942
Směr. odchylka :	0,142	0,197
Rozptyl :	0,020	0,039

Test shody rozptylů

Poměr rozptylů :	1,932	
Počet stupňů volnosti :	14	14
Kritická hodnota :	2,540	
Závěr :	Rozptyly jsou SHODNÉ	
Pravděpodobnost :	0,125	

Robustní test shody rozptylů

Poměr rozptylů :	1,932	
Redukované stupně volnosti :	7	7
Kritická hodnota :	3,787	
Závěr :	Rozptyly jsou SHODNÉ	
Pravděpodobnost :	0,202	

Test shody průměrů pro SHODNÉ rozptyly

t-statistika :	4,164
Počet stupňů volnosti :	28,000
Kritická hodnota :	2,048
Závěr :	Průměry jsou ROZDÍLNÉ
Pravděpodobnost :	0,000

Test shody průměrů pro ROZDÍLNÉ rozptyly

t-statistika :	4,164
Redukované stupně volnosti :	25,000
Kritická hodnota :	2,060
Závěr :	Průměry jsou ROZDÍLNÉ
Pravděpodobnost :	0,000

Test dobré shody rozdělení

dvouvýběrový K-S test

Diference DF :	0,667
Kritická hodnota :	0,496
Závěr :	Rozdělení jsou ROZDÍLNÁ

Příklad 3.31 ***Test shody dvou analytických metod stanovení jodového čísla***

Na osmi vzorcích sojového oleje bylo stanoveno jodové číslo metodou Hanuše (H) a metodou Wijssovou (W).

Určete, zda obě metody vedou ke stejným výsledkům.

Data: n = 8,

H : 139.90, 139.80, 138.90, 136.40, 139.40, 140.90, 139.20, 139.40.

W : 139.40, 139.90, 140.20, 140.30, 140.60, 140.90, 140.10, 140.30.

```
                              V Y S L E D K Y

    P r v n í   v ý b ě r :

 (  1)  1.3990E+02 (  3) 1.3890E+02 (  5) 1.3940E+02 (  7) 1.3920E+02
 (  2)  1.3980E+02 (  4) 1.3640E+02 (  6) 1.4090E+02 (  8) 1.3940E+02

    D r u h ý   v ý b ě r :

 (  1)  1.3940E+02 (  3) 1.4020E+02 (  5) 1.4030E+02 (  7) 1.4090E+02
 (  2)  1.3990E+02 (  4) 1.4030E+02 (  6) 1.4060E+02 (  8) 1.4010E+02

                                V Ý S T U P

(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

    Parametr              Výběr č.1          Výběr č.2          celkově

    Velikost výběru          8                  8                 16
    Průměr                1.3924E+02         1.4021E+02         1.3972E+02
    Rozptyl               1.6770E+00         2.0125E-01         8.7650E-01
    Šikmost              -1.2526E+00        -3.1101E-01        -1.5100E+00
    Špičatost             4.2248E+00         2.7878E+00         6.7999E+00

Napověda-F1   Řádek: 21 - 43                Celkem: 129   Délka: 5154
```

Normality test:
Šikmost (skewness) is > 0.3.

```
V Ý S L E D K Y
(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

    Průměr              :  1.3924E+02     Rozptyl   :  1.6770E+00
    Směrodatná odchylka:  1.2950E+00     Šikmost   : -1.2526E+00
    Špičatost           :  4.2248E+00

(2) TEST NORMALITY:

    Tabulkový kvantil  Chi^2(1-alfa,2) :  5.9915E+00
    Chi^2-statistika                   :  1.1509E+01
        Závěr: Předpoklad normality zamítnut
    Vypočtená hladina významnosti      :  3.1680E-03

(3) TEST NEZÁVISLOSTI:

    Tabulkový kvantil  t(1-alfa/2,n+1) :  2.2622E+00
    Test autokorelace                  :  3.0489E-01
        Závěr: Předpoklad nezávislosti přijat
    Vypočtená hladina významnosti      :  3.8369E-01
```

JB-test normality of the sample A

Sample A: JB-test Normality is rejected

```
V Ý S L E D K Y
(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

    Průměr              :  1.4021E+02     Rozptyl   :  2.0125E-01
    Směrodatná odchylka:  4.4861E-01     Šikmost   : -3.1100E-01
    Špičatost           :  2.7877E+00

(2) TEST NORMALITY:

    Tabulkový kvantil  Chi^2(1-alfa,2) :  5.9915E+00
    Chi^2-statistika                   :  6.8116E-01
        Závěr: Předpoklad normality přijat
    Vypočtená hladina významnosti      :  7.1136E-01

(3) TEST NEZÁVISLOSTI:

    Tabulkový kvantil  t(1-alfa/2,n+1) :  2.2622E+00
    Test autokorelace                  :  1.2034E+00
        Závěr: Předpoklad nezávislosti přijat
    Vypočtená hladina významnosti      :  1.2976E-01
```

JB-test normality of the sample B

Sample B: JB-test Normality is accepted

```
(2) TEST HOMOGENITY ROZPTYLU (hypotéza H0: s1^2=s2^2):

    Fisher-Snedecor F-test:

    Počet stupňů volnosti Df1                          :  7
                          Df2                          :  7
    Tabulkový kvantil F(1-alfa/2,Df1,Df2)              :  4.9949E+00
    F-statistika                                       :  8.3327E+00
        Závěr: Rozptyly se považují za rozdílné, H0 zamítnuta
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.006


    Korigovaný F-test :
    Počet stupňů volnosti Df1                          :  2
                          Df2                          :  2
    Tabulkový kvantil F(1-alfa/2,Df1,Df2)              :  3.9000E+01
    F-statistika                                       :  8.3327E+00
        Závěr: Rozptyly se považují za shodné, H0 přijata
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.107
```

F1-test and F2-test of the homoscedasticity

Conclusion: F2-test Sample variances are equal

```
                          V Ý S L E D K Y
    Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1)                  :  2.1448E+00
    t-statistika                                       :  2.0122E+00
        Závěr: Průměry se považují za shodné, H0 přijata
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.064

    t-test(pro různé rozptyly)

    Počet stupňů volnosti Df1                          :  10
    Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1)                  :  2.2281E+00
    t-statistika                                       :  2.0122E+00
        Závěr: Průměry se považují za shodné, H0 přijata
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.072

    t-test(modifikovaná šikmost)

    U-star                                             :  1.4515E+00
    B-X charakteristika                                :  5.6657E-01
    B-Y charakteristika                                :  5.8483E-03
    Počet stupňů volnosti Df1                          :  10
    Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1)                  :  2.2281E+00
    t-statistika                                       :  1.4515E+00
        Závěr: Průměry se považují za shodné, H0 přijata
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.177
Nápověda-F1   Řádek: 80 - 102                Celkem: 129   Délka: 5154
```

T3-test of the means equality

Conclusion: T3-test Sample means are equal

Příklad 3.29 ***Test shody obsahu listové kyseliny ve dvou vzorcích***

Pro fotometrické stanovení listové kyseliny je možné využít barevné reakce s 1,2 naftochinon-4-sulfonovou kyselinou. Měří se absorbance při 485 nm. Na dvou tabletách s deklarovaným obsahem 5 mg bylo provedeno 10 stanovení obsahu kyseliny listové.

Zjistěte, zda jsou obsahy listové kyseliny v obou tabletách stejné.

Data: n = 10, [mg]

Tableta A: 5.45, 5.15, 7.71, 5.55, 4.75, 5.32, 5.53, 5.09, 5.70, 4.42.

Tableta B: 4.98, 4.84, 4.77, 4.91, 4.84, 4.98, 4.91, 5.21, 4.67, 5.21.

```
První výběr:

( 1) 5.1500E+00 ( 4) 5.5500E+00 ( 7) 5.5300E+00 ( 10) 4.4200E+00
( 2) 5.4500E+00 ( 5) 4.7500E+00 ( 8) 5.0900E+00
( 3) 7.7100E+00 ( 6) 5.3200E+00 ( 9) 5.7000E+00

Druhý výběr:

( 1) 4.9800E+00 ( 4) 4.9100E+00 ( 7) 4.9100E+00 ( 10) 5.2100E+00
( 2) 4.8400E+00 ( 5) 4.8400E+00 ( 8) 5.2100E+00
( 3) 4.7700E+00 ( 6) 4.9800E+00 ( 9) 4.6700E+00

                    VÝSTUP

(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:
```

Parametr	Výběr č.1	Výběr č.2	celkově
Velikost výběru	10	10	20
Průměr	5.4670E+00	4.9320E+00	5.1995E+00
Rozptyl	7.7456E-01	3.0218E-02	3.8121E-01
Šikmost	1.6654E+00	4.3203E-01	2.2283E+00
Špičatost	5.5173E+00	2.3662E+00	1.0228E+01

Normality test:

Šikmost (skewness) is > 0.3.

```
V Ý S L E D K Y
(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

    Průměr              :  5.4670E+00     Rozptyl  :  7.7456E-01
    Směrodatná odchylka:  8.8009E-01     Šikmost  :  1.6654E+00
    Špičatost           :  5.5173E+00

(2) TEST NORMALITY:

    Tabulkový kvantil  Chi^2(1-alfa,2) :  5.9915E+00
    Chi^2-statistika                   :  2.4731E+01
        Závěr: Předpoklad normality zamítnut
    Vypočtená hladina významnosti      :  4.2633E-06

(3) TEST NEZÁVISLOSTI:

    Tabulkový kvantil  t(1-alfa/2,n+1) :  2.2010E+00
    Test autokorelace                  :  2.1387E-01
        Závěr: Předpoklad nezávislosti přijat
    Vypočtená hladina významnosti      :  4.1728E-01
```

JB-test normality of the sample A

Sample A: JB-test Normality is rejected

```
V Ý S L E D K Y
(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

    Průměr              :  4.9320E+00     Rozptyl  :  3.0222E-02
    Směrodatná odchylka:  1.7385E-01     Šikmost  :  4.3252E-01
    Špičatost           :  2.3666E+00

(2) TEST NORMALITY:

    Tabulkový kvantil  Chi^2(1-alfa,2) :  5.9915E+00
    Chi^2-statistika                   :  5.7091E-01
        Závěr: Předpoklad normality přijat
    Vypočtená hladina významnosti      :  7.5167E-01

(3) TEST NEZÁVISLOSTI:

    Tabulkový kvantil  t(1-alfa/2,n+1) :  2.2010E+00
    Test autokorelace                  :  1.6520E+00
        Závěr: Předpoklad nezávislosti přijat
    Vypočtená hladina významnosti      :  6.3381E-02
```

JB-test normality of the sample B

Sample B: JB-test Normality is accepted

```
(2) TEST HOMOGENITY ROZPTYLU (hypotéza H0: s1^2=s2^2):

    Fisher-Snedecor F-test:

    Počet stupňů volnosti Df1                          :  7
                          Df2                          :  7
    Tabulkový kvantil F(1-alfa/2,Df1,Df2)              :  4.9949E+00
    F-statistika                                       :  8.3327E+00
        Závěr: Rozptyly se považují za rozdílné, H0 zamítnuta
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.006


    Korigovaný F-test :
    Počet stupňů volnosti Df1                          :  2
                          Df2                          :  2
    Tabulkový kvantil F(1-alfa/2,Df1,Df2)              :  3.9000E+01
    F-statistika                                       :  8.3327E+00
        Závěr: Rozptyly se považují za shodné, H0 přijata
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.107
```

F1-test and F2-test of the homoscedasticity

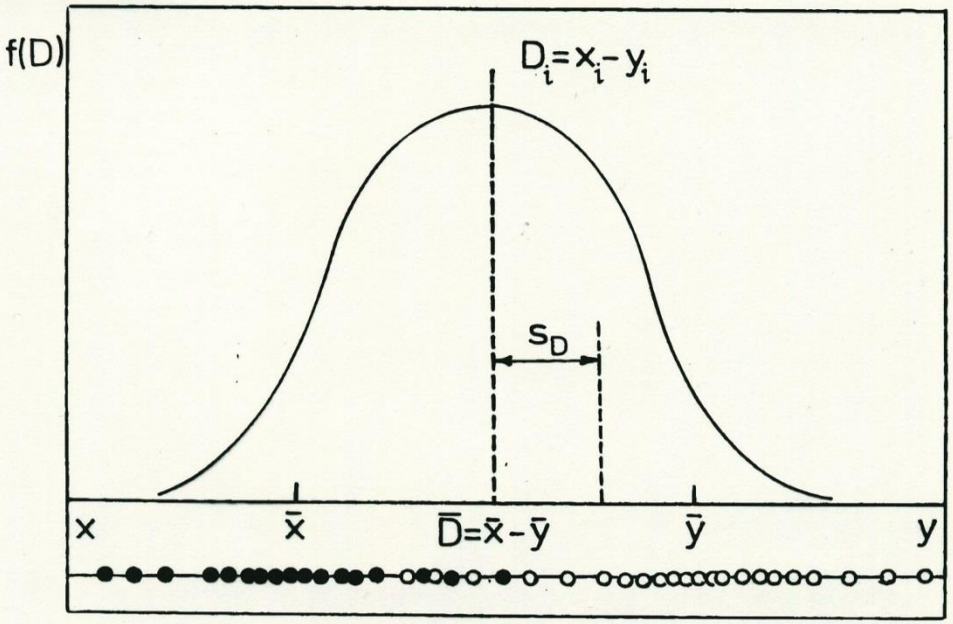
Conclusion: F2-test Sample variances are equal

```
                          V Ý S L E D K Y
    t-statistika                                       :  1.8859E+00
        Závěr: Průměry se považují za shodné, H0 přijata
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.076

    t-test(pro různé rozptyly)

    Počet stupňů volnosti Df1                          :  11
    Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1)                  :  2.2010E+00
    t-statistika                                       :  1.8859E+00
        Závěr: Průměry se považují za shodné, H0 přijata
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.086

    t-test(modifikovaná šikmost)

    U-star                                             :  2.5570E+00
    B-X charakteristika                                :  6.7240E-01
    B-Y charakteristika                                :  1.3441E-03
    Počet stupňů volnosti Df1                          :  11
    Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1)                  :  2.2010E+00
    t-statistika                                       :  2.5570E+00
        Závěr: Průměry se považují za rozdílné, H0 zamítnuta
    Vypočtená hladina významnosti                      :  0.027
```

T3-test of the means equality

Conclusion: T3-test Sample means are not equal

Párový test: Pair test for the pair data



Zadání párového testu

- mezi prvky obou výběrů existuje jistá logická vazba,

- prvky x_i vlastnosti před úpravou a prvky y_i po úpravě materiálu ***těchže*** vzorků ($n_1 = n_2$),

- utvoříme jednorozměrný výběr, $D_i = x_i - y_i$,

- střední hodnota μ_D se významně neliší od nuly, $\mu_x = \mu_y$,

Pair test for the pair data

$$H_0: \mu_D = 0 \quad \text{vs.} \quad H_A: \mu_D \neq 0$$

$$t_{exp} = \frac{\mu_D - 0}{s_D}\sqrt{n}$$

TESTOVÁNÍ: Je-li $t_{exp} < t_{1-\alpha/2}(n-1)$, je H_0 přijata.

Příklad 3.30 ***Párový test při ověření nové metody stanovení dinitrokresolu***

Při stanovení obsahu dinitrokresolu v postřikovacím přípravku se užívá poměrně pracné polarografické metody (P). Ukázalo se, že rychlejší a levnější je titrační stanovení (T).

Na 8 vzorcích byl proto určen obsah dinitrokresolu oběma metodami.

Určete, zda je možné nahradit polarografickou metodu metodou titrační.

Data: n = 8, [% stanoveného dinitrokresolu]:

P : 18.60, 27.60, 27.50, 25.00, 24.50, 26.80, 29.50, 26.50

T : 18.58, 27.37, 27.70, 24.64, 24.10, 26.33, 29.33, 26.63

Řešení:

1. Vypočteme míry polohy a rozptýlení pro obě metody a pro párové diference $d_i = P_i - T_i$.

2. Všechny tři varianty F-testu ukazují na shodu obou rozptylů při zvolené hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Pair test

```
V Y S L E D K Y

P r v n í   v ý b ě r :

(  1)  1.8600E+01 (  3) 2.7500E+01 (  5) 2.4500E+01 (  7) 2.9500E+01
(  2)  2.7600E+01 (  4) 2.5000E+01 (  6) 2.6800E+01 (  8) 2.6500E+01

D r u h ý   v ý b ě r :

(  1)  1.8580E+01 (  3) 2.7700E+01 (  5) 2.4100E+01 (  7) 2.9330E+01
(  2)  2.7370E+01 (  4) 2.4640E+01 (  6) 2.6330E+01 (  8) 2.6630E+01

                    V Ý S T U P

(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

   Parametr              Výběr č.1          Výběr č.2          celkově

   Velikost výběru          8                  8                 16
   Průměr               2.5750E+01         2.5585E+01         2.5668E+01
   Rozptyl              1.0780E+01         1.0786E+01         1.0064E+01
   Šikmost             -1.3026E+00        -1.2013E+00        -1.2520E+00
   Špičatost            3.9853E+00         3.7078E+00         3.8465E+00

Nápověda-F1   Řádek: 21 - 43                Celkem: 129   Délka: 5142
```

```
t-test(párový)

Průměrný rozdíl                          :  1.6500E-01
Rozptyl                                  :  1.9097E-01
Počet stupňů volnosti Df1                :  7
Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1)        :  2.3646E+00
t-statistika                             :  2.4438E+00
    Závěr: Průměry se považují za rozdílné, H0 zamítnuta
Vypočtená hladina významnosti            :  0.045
```

Conclusion: Sample means are not equal

Horn

Analýza malého výběru

Na vzorové úloze **B3.01** *Střední hodnota haptoglobinu v lidském krevním séru* ukážeme Hornův postup analýzy malých výběrů.

Data: *Koncentrace haptoglobinu [g l^{-1}]: 1.82 3.32 1.07 1.27 0.49 3.79 0.15 1.98*

Řešení: Hornův postup pivotů pro malé výběry ($4 < n < 20$):

1. Pořádkové statistiky:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_{(i)}$	0.15	0.49	1.07	1.27	1.82	1.98	3.32	3.79

2. Hloubka pivotu: n = **8**, sudé

$$H = int\,\frac{\frac{m+1}{2}+1}{2}$$

int(2.75) ≈ 2

3. Pivoty: *Dolní pivot* $x_D = x_{(H)}$ $\quad x_{(2)} = 0.49$

Horní pivot $x_H = x_{(n+1-H)}$ $\quad x_{(7)} = 3.32$

4. Pivotová polosuma $P_L = \dfrac{x_D + x_H}{2}$ $= 1.905$

5. *Pivotové rozpětí* $R_L = x_H - x_D$ $\qquad 3.32 - 0.49 = 2.83$

6. *95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty μ:* $\qquad t_{L,\,1-\alpha/2} = 0.564$

$$P_L - R_L\, t_{L,1-\alpha/2}(n) \leq \mu \leq P_L + R_L\, t_{L,1-\alpha/2}(n)$$

$$1.905 - 2.83 \times 0.564 \leq \mu \leq 1.905 + 2.83 \times 0.564$$

$$0.31 \leq \mu \leq 3.50$$

7. *Závěr:* Bodový odhad míry polohy je **1.91 g/l**, míry rozptýlení **2.83** a intervalový odhad míry polohy je **0.31 g/l ≤ μ ≤ 3.50 g/l**.

Horn´s procedure for $4 \leq n \leq 20$

Procedure based on order statistics.

1) Write the table of **order statistics**.

2) The **pivot depth** is expressed by $H_L = \text{int}[(n + 1)/2]/2$ or $H_L = \text{int}[(n + 1)/2 + 1]/2$ according to which of the H_L is an integer.

3) The **lower pivot** is $x_L = x_{(H)}$ and the **upper** one is $x_U = x_{(n+1-H)}$.

4) The estimate of the parameter of location is then expressed by the ***pivot half sum***

$$P_L = 0.5(x_L + x_U)$$

5) The estimate of the parameter of spread is expressed by the ***pivot range***

$$R_L = x_U - x_L$$

6) The **random variable**

$$T_L = \frac{P_L}{R_L} = \frac{x_L + x_U}{2(x_U - x_L)}$$

has approximately a symmetric distribution and its quantiles are given in Table.

7) The **95% confidence interval** of the mean is expressed by pivot statistics as

$$P_L - R_L \; t_{L,0.975}(n) \le \mu \le P_L + R_L \; t_{L,0.975}(n)$$

Exercise B3.01 *Estimate of median value of haptoglobin in human blood serum (Horn)*

The concentration of haptoglobin in human blood serum was measured in eight adult individuals. Calculate estimates for median value, parameter of variance, and 95% interval of reliability of median value. Examine whether this sample comes from a logarithmic-normal distribution. Also apply Horn's procedure (pg. 51 in [14]).

Data: Concentration of haptoglobin [g. l^{-1}] in human blood serum:
1.82, 3.32, 1.07, 1.27, 0.49, 3.79, 0.15, 1.98.

1. Order statistics:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_{(1)}$	0.15	0.49	1.07	1.27	1.82	1.98	3.32	3.79

2. Depth of pivot: $n = 8,$

$$H = integer\frac{\frac{n+1}{2}+1}{2} = \qquad \text{int}(2.75) \approx 2$$

3. Lower and upper pivot:

$$x_D = x_{(H)} = \qquad x_{(2)} = \mathbf{0.49}$$
$$x_H = x_{(n+1-H)} = \qquad x_{(7)} = \mathbf{3.32}$$

4. $$P_L = \frac{x_D + x_H}{2} = \qquad = \mathbf{1.905}$$

5. $$R_L = x_H - x_D = \qquad 3.32 - 0.49 = \mathbf{2.83}$$

6. 95% $\qquad t_{L,\ 1-\alpha/2} = 0.564$

$$P_L - R_L\, t_{L,\ 1-\alpha/2}(n) \le \mu \le P_L + R_L\, t_{L,\ 1-\alpha/2}(n)$$

$$1.905 - 2.83 \times 0.564 \le \mu \le 1.905 + 2.83 \times 0.564$$

$$\mathbf{0.31 \le \mu \le 3.50}$$

Study case II

Parametric tests for samples of multi-dimensional data

Porovnání více vektorů ve zdrojové matici dat

Vícerozměrný test správnosti

PŘÍKLAD 4.5 *Magnetizační vlastnosti ocelí* (učebnice)

Pro 10 náhodně vybraných taveb železa (výběr V_1) byla zkoumána magnetická indukce x_1 [T] a koercitivní síly x_2 [A . m^{-1}] ocelí. Účelem je testovat nulovou hypotézu H_0: $\boldsymbol{\mu} = (1.75 \quad 70)$ a zkonstruovat 95% oblast spolehlivosti vektoru středních hodnot $\boldsymbol{\mu}$.

○ *Data:* Výběr V_1

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	[T]	1.788	1.710	1.843	1.725	1.740	1.731	1.780	1.746	1.828	1.796
x_2	[A . m^{-1}]	85.1	69.0	84.0	58.1	69.8	50.9	52.2	53.8	83.5	61.8

Úkol: Mají oba, a to výběr V_1 a výběr V_2 správnou střední hodnotu, tj. $\boldsymbol{\mu}_1 = (1.75 \quad 70)$ a $\boldsymbol{\mu}_2 = (1.75 \quad 70)$?

Vícerozměrný test shodnosti

Příklad 4.6 *Testování shody vektoru středních hodnot* $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ (učebnice)

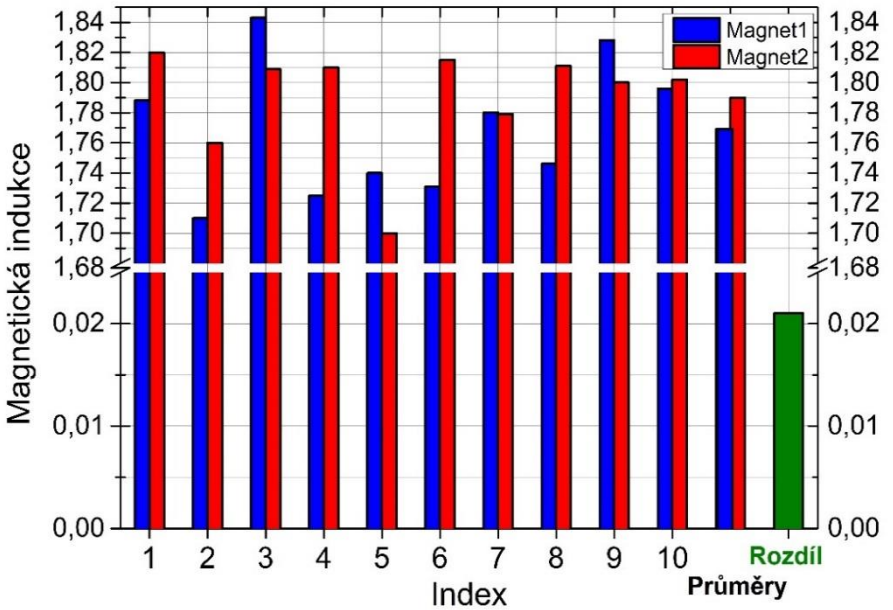
Za stejných podmínek jako u předešlého příkladu 4.5 byly u dalších deseti náhodně vybraných taveb železa (výběr V_2) zkoumány magnetické indukce x_1 [T] a koercitivní síly x_2 [A . m^{-1}] ocelí. Testováním prověřte, zda má výběr V_1 a výběr V_2 shodný vektor středních hodnot, tj. $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$.

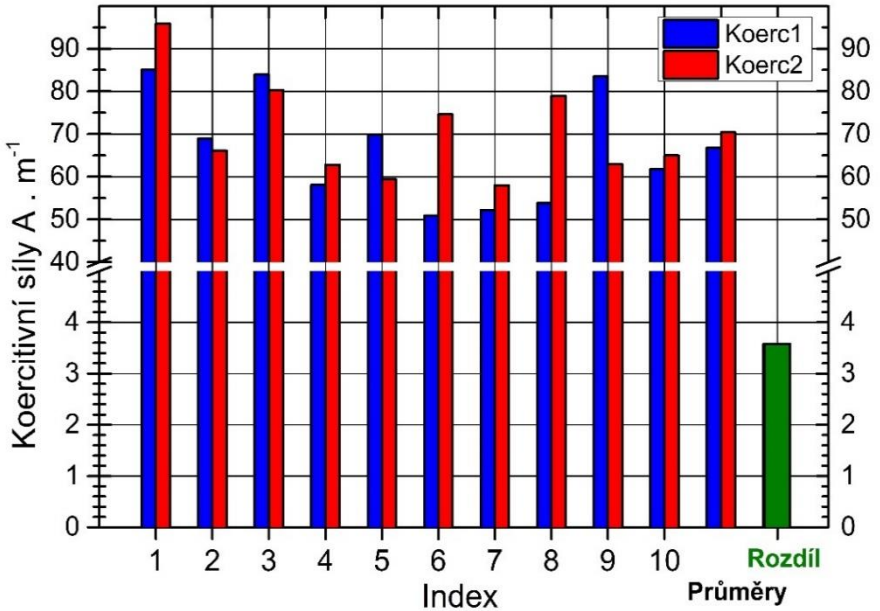
Data: Výběr V_2

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	[T]	1.820	1.760	1.809	1.810	1.700	1.815	1.779	1.811	1.800	1.802
x_2	[A . m^{-1}]	95.9	66.1	80.3	62.8	59.4	74.6	58.0	78.9	63.0	65.0

Úkol: Má výběr V_1 a výběr V_2 shodný vektor středních hodnot, tj. $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$?

Výběr V1 je modrý, výběr V2 je červený.





1. **Míra polohy** náhodného vektoru se charakterizuje pomocí *vektoru středních hodnot* $\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{T}} = [E(\xi_1), \ldots, E(\xi_m)]$.

2. **Míra rozptýlení** pomocí *kovarianční matice* řádu $m \times m$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} D(\xi_1) & cov(\xi_1, \xi_2) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_i) & \cdots & cov(\xi_1, \xi_m) \\ cov(\xi_1, \xi_2) & D(\xi_2) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ cov(\xi_1, \xi_m) & cov(\xi_2, \xi_m) & \cdots & cov(\xi_i, \xi_m) & \cdots & D(\xi_m) \end{bmatrix}.$$

Místo kovarianční matice užijeme její normovanou verzi,

korelační matici $$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1i} & \cdots & \varrho_{1m} \\ \varrho_{12} & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varrho_{1m} & \varrho_{2m} & \cdots & \varrho_{im} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

má na diagonále samé jedničky a mimodiagonální prvky jsou *Perasonovy párové korelační koeficienty.*

Statistická analýza vektoru středních hodnot

A. Testování nulové hypotézy H_0: $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$

Vícerozměrný test správnosti

Data $\boldsymbol{X}$ jsou náhodným výběrem velikosti n z m-rozměrného normálního rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{C})$. Parametry $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{C}$ jsou neznámé a odhadují se pomocí výběrových charakteristik $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\boldsymbol{S}$.

K testování se používá Hotellingovy T^2-statistiky

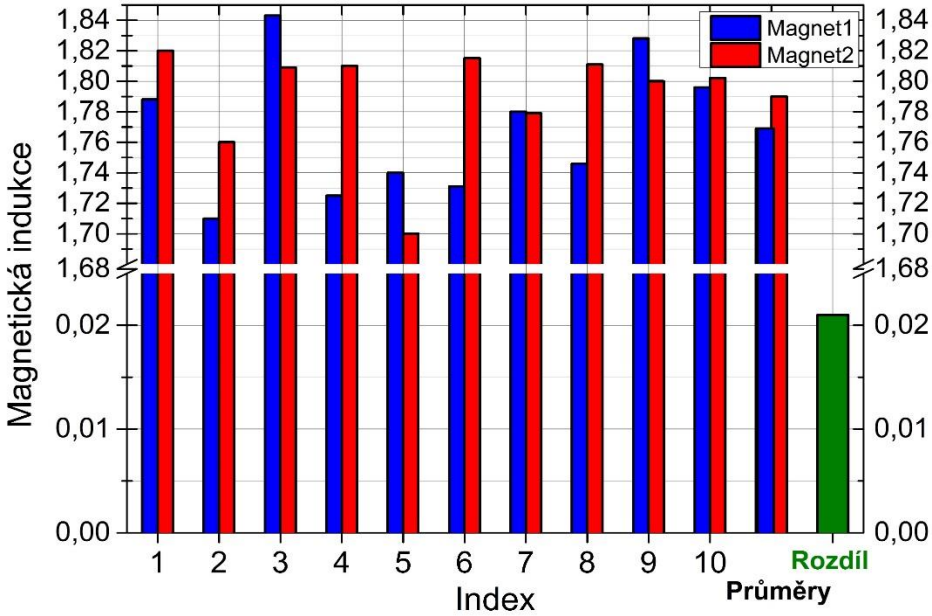
$$T^2 = n\,(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0)^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{S}^{-1}\,(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0)\ .$$

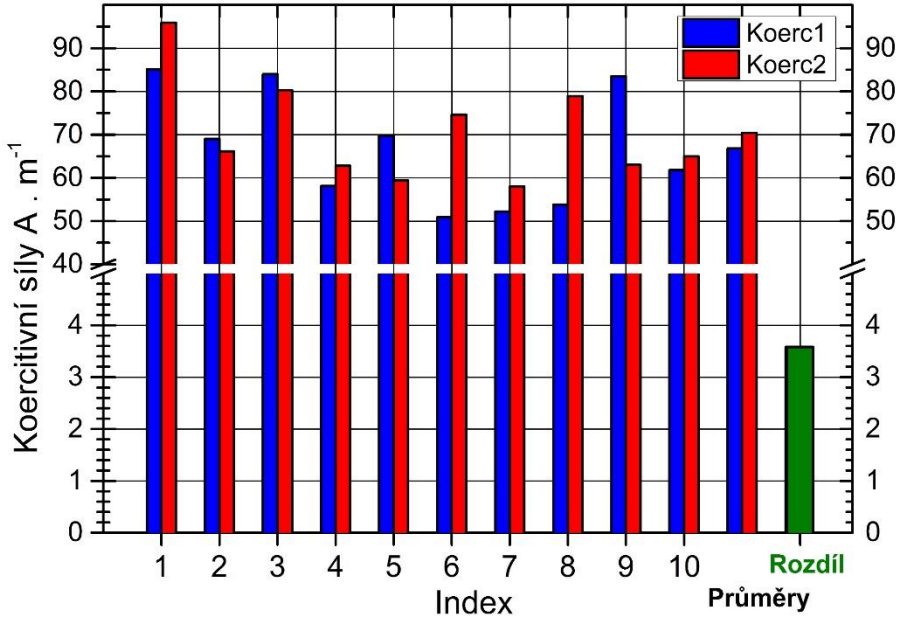
Testování:

1. Je-li $T^2 \leq T^2(1 - \alpha/2)$, je na hladině významnosti α hypotéza H_0: $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ přijata.
2. Je-li $T^2 > T^2(1 - \alpha/2)$, hypotéza H_0: $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ se zamítá.

Při platnosti H_0 má veličina $C = (n - m)\,T^2/(m\,(n - 1))$ F-rozdělení s m a $n - m$ stupni volnosti. Pokud je H_0 neplatná, má veličina C necentrální F-rozdělení. Pomocí veličiny C lze testovat hypotézu H_0 F-testem.

Rozdíl mezi průměry výběrů je dle spočtené hladiny p > 0.05 nevýznamný.





Vícerozměrný test správnosti výběru V1

Numerický test: Hotellingovou T^2 statistikou

PRIKLAD 4.5 *Magnetizační vlastnosti ocelí* (učebnice)

Pro 10 náhodně vybraných taveb železa (výběr V_1) byla zkoumána magnetická indukce x_1 [T] a koercitivní síly x_2 [A . m^{-1}] ocelí. Účelem je testovat nulovou hypotézu H_0: $\boldsymbol{\mu} = (1.75 \quad 70)$ a zkonstruovat 95% oblast spolehlivosti vektoru středních hodnot $\boldsymbol{\mu}$.

○ *Data:* Výběr V_1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1 [T]	1.788	1.710	1.843	1.725	1.740	1.731	1.780	1.746	1.828	1.796
x_2 [A . m^{-1}]	85.1	69.0	84.0	58.1	69.8	50.9	52.2	53.8	83.5	61.8

○ *Řešení:* Pro odhad vektoru středních hodnot platí $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (1.769,\ 66.82)^T$ a výběrová kovarianční matice a k ní matice inverzní mají tvar

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.376 \\ 0.376 & 184.3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 781.6 & -1.592 \\ -1.592 & 0.0087 \end{bmatrix}.$$

Protože je $\boldsymbol{\mu}_0 = (1.75,\ 70)^T$, lze dosazením do rovnice vyčíslit Hotellingovu T^2-statistiku

$$T^2 = 10\,(0.019,\ -3.18)\begin{bmatrix} 781.6 & -1.592 \\ -1.592 & 0.0087 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.019 \\ -3.18 \end{bmatrix} = 5.503\ .$$

Odpovídající hodnota je $C = 9 \cdot 5.503/18 = 2.446$. Kvantil F-rozdělení $F_{2,9}(0.95) = 4.459$. Protože je C menší než tento kvantil, hypotéza H_0 je přijata na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \{\ 1{,}75 \quad 70\}$$

Rozdíl mezi průměry výběrů je dle spočtené hladiny p > 0.05 nevýznamný.

Vícerozměrný test správnosti výběru V1

Počítačový test: software NCSS2007

Descriptive Statistics **Rozdíl průměru po odečtení μ_0**

Variable	Mean Diff.	S.D. of Diff.
A1-H1	0,0187	0,0452132
B1-H2	-3,18	13,57742
Count	10	10

Test rozdílu = μ - μ_0

vůči μ_0 = {1,75 70}

Hotelling's T2 Test Section

Testování rozdílu vůči μ_0

Hypothesis	T2	DF1	DF2	Parametric Test Prob Level	Randomization Test Prob Level
Means All Zero	5,503	2	9,0	0,1483	0,1500
Means All Equal	0,557	1	9,0	0,4744	0,4765

The randomization test results are based on 1000 Monte Carlo samples.

Individual Variables Section **Testování jednotlivých proměnných vůči μ_0**

Variable Omitted	T2 Others	Prob Level	T2 Change	Prob Level	T2 Alone	Prob Level
A1-H1	0,549	0,4778	4,955	0,0810	1,711	0,2233
B1-H2	1,711	0,2233	3,793	0,1362	0,549	0,4778

Rozdíl mezi průměry výběrů je dle spočtené hladiny p > 0.05 nevýznamný.

Student's T-Test Section

Variable	T2 or |Student's T|	Parametric Test Prob Level	Randomization Test Prob Level
All (T2)	5,503	0,1483	0,1500
A1-H1	1,308	0,2233	0,2200
B1-H2	0,741	0,4778	0,4770

The randomization test results are based on 1000 Monte Carlo samples.
These individual t-test significance levels should only be used when the overall T2 value is significant.

Copyright PDF to JPG
http://www.pdf-to-jpg.converter.com/pdf-to-jpg/

Confidence Intervals for the Mean Differences Section **Testování intervalu spolehlivosti rozdílů vůči μ_0**

Variable	Difference	Lower 95,0% Bonferroni Conf. Limit	Upper 95,0% Bonferroni Conf. Limit	Lower 95,0% Simultaneous Conf. Limit	Upper 95,0% Simultaneous Conf. Limit
A1-H1	0,0187	-0,0196894	0,0570894	-2,658702E-02	6,398702E-02
B1-H2	-3,18	-14,70824	8,348244	-16,77958	10,41959

Vícerozměrný test správnosti výběru V2

Počítačový test: software NCSS2007

Descriptive Statistics Rozdíl průměru po odečtení μ_0

Variable	Mean Diff.	S.D. of Diff.
A2-H1	0,0406	3,664909E-02
B2-H2	0,4	11,89342
Count	10	10

Test rozdílu = μ - μ_0

vůči μ_0 = {1,75 70}

Hotelling's T2 Test Section

Testování rozdílu vůči μ_0

Hypothesis	T2	DF1	DF2	Parametric Test Prob Level	Randomization Test Prob Level
Means All Zero	17,318	2	9,0	0,0137	0,0210
Means All Equal	0,009	1	9,0	0,9258	0,9419

The randomization test results are based on 1000 Monte Carlo samples.

Individual Variables Section Testování jednotlivých proměnných vůči μ_0

Variable Omitted	T2 Others	Prob Level	T2 Change	Prob Level	T2 Alone	Prob Level
A2-H1	0,011	0,9176	17,307	0,0058	12,272	0,0067
B2-H2	12,272	0,0067	5,046	0,2108	0,011	0,9176

Rozdíl mezi průměry výběrů je dle spočtené hladiny p > 0.05 nevýznamný.

Student's T-Test Section

Variable	T2 or |Student's T|	Parametric Test Prob Level	Randomization Test Prob Level
All (T2)	17,318	0,0137	0,0210
A2-H1	3,503	0,0067	0,0110
B2-H2	0,106	0,9176	0,9280

Copyright PDF to JPG
http://www.pdftojpgconverter.com/pdf-to-jpg/

The randomization test results are based on 1000 Monte Carlo samples.
These individual t-test significance levels should only be used when the overall T2 value is significant.

Confidence Intervals for the Mean Differences Section Testování intervalu spolehlivosti rozdílu vůči μ_0

Variable	Difference	Lower 95,0% Bonferroni Conf. Limit	Upper 95,0% Bonferroni Conf. Limit	Lower 95,0% Simultaneous Conf. Limit	Upper 95,0% Simultaneous Conf. Limit
A2-H1	0,0406	9,482177E-03	7,171782E-02	3,891072E-03	7,730893E-02
B2-H2	0,4	-9,698401	10,4984	-11,51284	12,31283

Vícerozměrný test shodnosti

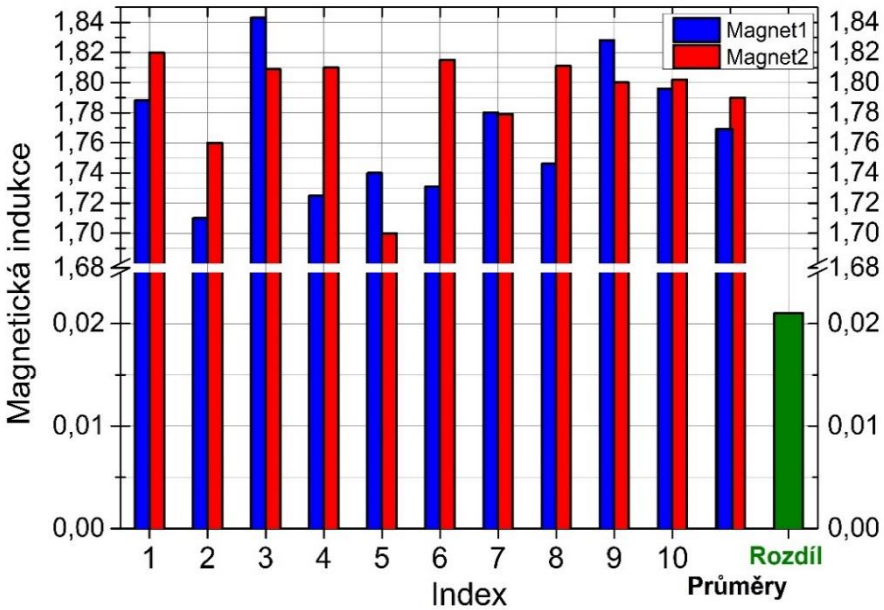
Výběr V1 je modrý, výběr V2 je červený.

PŘÍKLAD 4.5 *Magnetizační vlastnosti ocelí* (učebnice)

Pro 10 náhodně vybraných taveb železa (výběr V_1) byla zkoumána magnetická indukce x_1 [T] a koercitivní síly x_2 [A . m^{-1}] ocelí. Účelem je testovat nulovou hypotézu H_0: $\boldsymbol{\mu} = (1.75 \quad 70)$ a zkonstruovat 95% oblast spolehlivosti vektoru středních hodnot $\boldsymbol{\mu}$.

○ *Data:* Výběr V_1

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	[T]	1.788	1.710	1.843	1.725	1.740	1.731	1.780	1.746	1.828	1.796
x_2	[A . m^{-1}]	85.1	69.0	84.0	58.1	69.8	50.9	52.2	53.8	83.5	61.8

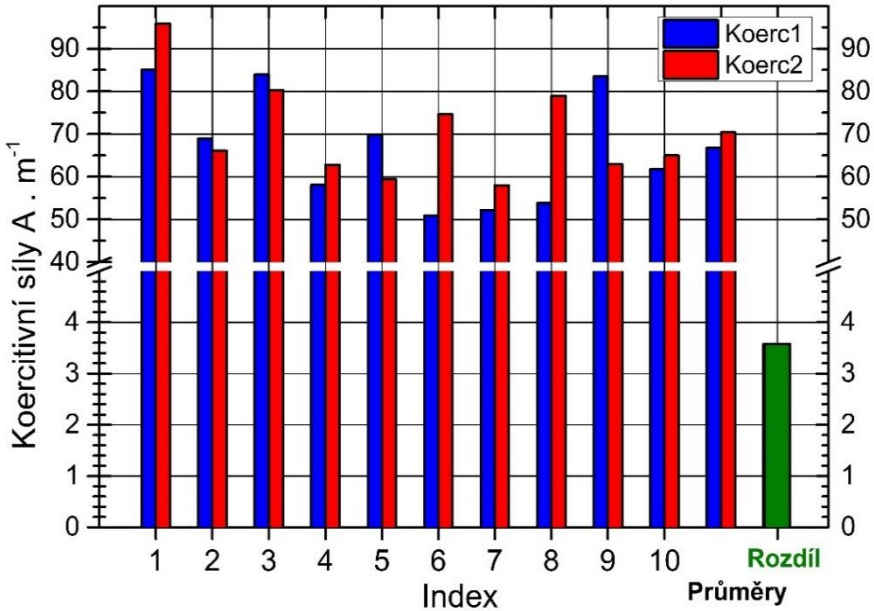


Příklad 4.6 *Testování shody vektoru středních hodnot* $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ (učebnice)

Za stejných podmínek jako u předešlého příkladu 4.5 byly u dalších deseti náhodně vybraných taveb železa (výběr V_2) zkoumány magnetické indukce x_1 [T] a koercitivní síly x_2 [A . m^{-1}] ocelí. Testováním prověřte, zda má výběr V_1 a výběr V_2 shodný vektor středních hodnot, tj. $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$.

Data: Výběr V_2

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	[T]	1.820	1.760	1.809	1.810	1.700	1.815	1.779	1.811	1.800	1.802
x_2	[A . m^{-1}]	95.9	66.1	80.3	62.8	59.4	74.6	58.0	78.9	63.0	65.0



Úkol: Má výběr V_1 a výběr V_2 shodný vektor středních hodnot, tj. $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$?

Vícerozměrný test shodnosti

B. Test shody dvou vícerozměrných středních hodnot $\boldsymbol{\mu}_1$ a $\boldsymbol{\mu}_2$, čili H_0: $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ a H_1: $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$.

Vychází se ze dvou náhodných výběrů $\boldsymbol{X}_1$ a $\boldsymbol{X}_2$ vícerozměrných normálních rozdělení

$$N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{C}_1) \text{ a } N(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{C}_2) .$$

Testování závisí na tom, zda kovarianční matice $\boldsymbol{C}_1$ a $\boldsymbol{C}_2$ jsou shodné či nikoli:

1. Obě rozdělení mají s h o d n o u kovarianční matici, $C_1 = C_2 = C$.

Za odhad matice $\boldsymbol{C}$ se užije *společná* (pooled) *výběrová kovarianční matice* $\boldsymbol{S}_p$ dle

$$\boldsymbol{S}_p = \frac{(n_1 - 1)\boldsymbol{S}_1 + (n_2 - 1)\boldsymbol{S}_2}{n_1 + n_2 - 2},$$ kde $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$ jsou kovarianční matice výběru $\boldsymbol{X}_1$ a $\boldsymbol{X}_2$.

Hotellingova testační statistika má tvar $$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 - \hat{\boldsymbol{\mu}}_2)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_p^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 - \hat{\boldsymbol{\mu}}_2) .$$

Veličina $$C = T^2 \frac{n_1 + n_2 - m - 1}{m(n_1 + n_2 - 2)}$$ má za při platnosti hypotézy H_0 F-rozdělení s m a $n_1 + n_2 - m - 1$ stupni volnosti.

Rozdíl mezi průměry výběrů je dle spočtené hladiny p > 0.05 nevýznamný.

2. Kovarianční matice se v ý z n a m n ě l i š í , $C_1 \neq C_2$.
(vícerozměrný Behrensův–Fisherův problém)

Vychází se ze dvou výběrů $\boldsymbol{X_1}$ velikosti n_1 a $\boldsymbol{X_2}$ velikosti n_2 pocházejících z m-rozměrných normálních rozdělení $N(\mu_1, \boldsymbol{C}_1)$ a $N(\mu_2, \boldsymbol{C}_2)$.

Nejdříve jsou určeny odhady středních hodnot $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1$ a $\hat{\boldsymbol{\mu}}_2$, respektive kovariančních matic $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$. Protože $\boldsymbol{C}_1 \neq \boldsymbol{C}_2$, nelze pro určení společné kovarianční matice $\boldsymbol{S}_\mathrm{P}$ použít dřívější rovnici ale lze sestavit statistiku $T_\mathrm{N}^2 = (\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 - \hat{\boldsymbol{\mu}}_2)^\mathrm{T} \left(\frac{\boldsymbol{S}_1}{n_1} + \frac{\boldsymbol{S}_2}{n_2} \right)^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 - \hat{\boldsymbol{\mu}}_2)$.

Tato veličina T_N^2 však již nemá ani χ^2-rozdělení ani Hotellingovo rozdělení. Použije se proto veličinu $C_\mathrm{N} = \frac{\hat{f} - m - 1}{m\,\hat{f}} T_\mathrm{N}^2$ má F-rozdělení s m a f stupni volnosti dle vztahu

$$\hat{f} = \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}^2) + [\mathrm{tr}(\boldsymbol{V})]^2}{\sum_{i=1}^{2} \left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}_i^2) + \mathrm{tr}^2(\boldsymbol{V}_i)\right]/(n_i - 1)}, \quad \text{kde } \boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{S}_i\, n_i \text{ a } \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{V}_i.$$

Johansen doporučuje použití statistiky

$$C_{\mathrm{J}} = [m + 2A - \frac{6A}{m(m-1)+2}]^{-1} \quad T_{\mathrm{N}}^2 ,$$

která má opět F-rozdělení ale s m a $\hat{f}_1$ stupni volnosti, a veličina A se vyčíslí dle

$$A = \sum_{i=1}^{2} \left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{E} - V^{-1} V_i^{-1})^2 + \mathrm{tr}^2(\boldsymbol{E} - V^{-1} V_i^{-1}) \right] / 2(n_i - 1) \quad \text{a} \quad \hat{f}_1 = m(m+3)/A .$$

Ke zjednodušení dojde v případě, kdy $n_1 = n_2$, tj. velikosti výběrů jsou stejné.

Vícerozměrný test shodnosti

Numerický test: Hotellingovou T^2 statistikou

Test: Rozdíl průměrů pro výběry V_1 a V_2 je roven $\mu_1 - \mu_2$, a pro spočtenou hladinu p > 0.05 je tento rozdíl nevýznamný

- *Řešení:* Úlohu budeme řešit
  1) jednak pro shodné kovarianční matice $\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_2$,
  2) tak i pro různé kovarianční matice $\boldsymbol{C}_1 \neq \boldsymbol{C}_2$.

Pro výběr V_1 platí $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1^{\mathbf{T}} = (1.769, \quad 66.82)$, $\boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} 0.00204 & 0.376 \\ 0.376 & 186.3 \end{bmatrix}$

a pro výběr V_2 platí $\hat{\boldsymbol{\mu}}_2^{\mathbf{T}} = (1.79, \quad 70.4)$, $\boldsymbol{S}_2 = \begin{bmatrix} 0.00134 & 0.245 \\ 0.245 & 141.5 \end{bmatrix}$.

ad1) Řešení pro případ shodných kovariančních matic $\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_2$.

Výběrová kovarianční matice je rovna $\boldsymbol{S}_\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.00169 & 0.31 \\ 0.31 & 162.9 \end{bmatrix}$ a testovací T^2-statistika

je pak $T^2 = 1.425$, což odpovídá veličině $C = 1.425 \cdot 17/36 = 0.673$ a kritická hodnota $F_{2,17}(0.95) = 3.5915$ je větší než C, a proto je přijata nulová hypotéza H_0 o shodě vektorů středních hodnot obou výběrů. **Rozdíl mezi průměry výběrů je dle spočtené hladiny p > 0.05 nevýznamný.**

ad 2) Řešení pro případ odlišných kovariančních matic $\boldsymbol{C}_1 \neq \boldsymbol{C}_2$.
Protože je v obou výběrech stejný počet prvků n, bude po odečtení prvků obou výběrů

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{Z}} = (-0.0219, \quad -3.58)\ , \qquad \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{Z}} = \begin{bmatrix} 0.0023 & 0.508 \\ 0.508 & 199.6 \end{bmatrix}.$$

Testovací T^2-statistika $= 2.244$ a $C = 8 \cdot 2.244/18 = 0.997$ a kritická hodnota $F_{2,8}(0.95) = 4.459$ je značně větší než C, přijímá se nulová hypotéza H_0 o shodě vektorů středních hodnot obou výběrů. **Rozdíl mezi průměry výběrů je dle spočtené hladiny p > 0.05 nevýznamný.**

○ *Závěr:* Je patrné, že pro tento příklad nezávisle na shodě kovariančních matic vychází pro oba výběry shodné vektory středních hodnot $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$.

Vícerozměrný test shodnosti

Počítačový test: softwarem NCSS2007

Hotelling's Paired-Sample T2 Report

Rozdíl mezi průměry výběrů je roven = $\mu_1 - \mu_2$

Page/Date/Time 1 1.10.2018 12:10:12
Database E:\1-Lednice-přednáška\P406-str268.S0

Descriptive Statistics **Rozdíl dvou průměrů by měl být nula se svou směrodatnou odchylkou**

Variable	Mean Diff.	S.D. of Diff.
A1-A2	-0,0219	4,808661E-02
B1-B2	-3,58	14,12899
Count	10	10

Hotelling's T2 Test Section

Hypothesis	T2	DF1	DF2	Parametric Test Prob Level	Randomization Test Prob Level
Means All Zero	2,245	2	9,0	0,4104	0,4070
Means All Equal	0,637	1	9,0	0,4452	0,4324

The randomization test results are based on 1000 Monte Carlo samples.

Individual Variables Section **Rozdíl dvou průměrů u ostatních proměnných kromě průměru vlevo;** **Změna rozdílu …. kromě toho vlevo;**

Změna rozdílu …. od toho vlevo;

Variable Omitted	T2 Others	Prob Level	T2 Change	Prob Level	T2 Alone	Prob Level
A1-A2	0,642	0,4436	1,603	0,2867	2,074	0,1837
B1-B2	2,074	0,1837	0,171	0,7359	0,642	0,4436

Student's T-Test Section

Variable	T2 or |Student's T|	Parametric Test Prob Level	Randomization Test Prob Level
All (T2)	2,245	0,4104	0,4070
A1-A2	1,440	0,1837	0,1830
B1-B2	0,801	0,4436	0,4330

The randomization test results are based on 1000 Monte Carlo samples.
These individual t-test significance levels should only be used when the overall T2 value is significant.

Rozdíl mezi průměry výběrů je dle spočtené hladiny $p > 0.05$ nevýznamný.

Confidence Intervals for the Mean Differences Section **Testování rozdílu dvou průměru jeho intervalem spolehlivosti**

Variable	Difference	Lower 95,0% Bonferroni Conf. Limit	Upper 95,0% Bonferroni Conf. Limit	Lower 95,0% Simultaneous Conf. Limit	Upper 95,0% Simultaneous Conf. Limit
A1-A2	-0,0219	-6,272914E-02	1,892914E-02	-7,006513E-02	2,626513E-02
B1-B2	-3,58	-15,57657	8,416574	-17,73206	10,57206

Vícerozměrný test shodnosti pro více středních hodnot

D. Test shody celkem r středních hodnot $\boldsymbol{\mu}_i$, tzn. nulovou hypotézu H_0: $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \ldots = \boldsymbol{\mu}_r$ proti alternativní H_A: $\boldsymbol{\mu}_i \neq \boldsymbol{\mu}_j$.

Vychází se z k-tice náhodných výběrů $\boldsymbol{X}_k$ velikosti n_k, o kterých se předpokládá, že pocházejí z rozdělení $N(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{C})$ lišících se pouze středními hodnotami. Z těchto výběrů jsou vypočteny odhady $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$ a $\boldsymbol{S}_j$. Označí se $\boldsymbol{V}_S = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{V}_j$, $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$. a průměr $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} \hat{\boldsymbol{\mu}}_i$.

Pak se vyčíslí matice $\boldsymbol{V}_C = \sum_{i=1}^{k} n_i \, (\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \tilde{\boldsymbol{\mu}}) \, (\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \tilde{\boldsymbol{\mu}})^{\mathrm{T}}$.

Z řady podobných testů k testování uvedené hypotézy uvedeme pouze Wilcoxovo λ kritérium

$$\lambda = \det \boldsymbol{V}_S \,/\, \det (\boldsymbol{V}_S + \boldsymbol{V}_C).$$

Kvantily rozdělení veličiny λ jsou publikovány v tabulkách.

Vícerozměrný test shodnosti pro více středních hodnot

E. Test hypotézy o shodnosti všech složek vektoru

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m,$$

$$\text{kde } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} = (1, 1, \ldots, 1)^T, \boldsymbol{g} = \boldsymbol{\mu} \text{ a } r = 1.$$

(Podobně lze formulovat hypotézy o shodě pouze některých složek, respektive jejich nulitě).

Při testování se vychází z výběru $\boldsymbol{X}$ velikosti n, na jehož základě se konstruuje výběrový průměr $\boldsymbol{\mu}$ a výběrová kovarianční matice $\boldsymbol{S}$.
K testování nulové hypotézy H_0: $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{g}$ se používá statistika

$$P_1 = \frac{n - m + r}{m - r}\, n\, \hat{\boldsymbol{\mu}}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{V}^{-1} - \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{B}\, \boldsymbol{V}^{-1})\, \hat{\boldsymbol{\mu}}\ ,$$

která má v případě platnosti hypotézy H_0 F-rozdělení s $m - r$ a $n - m + r$ stupni volnosti, a matice $\boldsymbol{B}$ zde má tvar $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{V}^{-1}\, \boldsymbol{A})^{-1}\, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

PŘÍKLAD 4.7 *Vliv přípravy vzorku na stanovení zinku v pšenici*

Stryjewska určovala obsah kovů v obilovinách diferenciální pulzní voltametrií. Rozklad vzorku zrn byl prováděn mineralizací za mokra x_1, suchým zpopelněním x_2 a vysokotlakou mineralizací v autoklávu x_3. Na šesti vzorcích pšenice byl stanoven obsah zinku [ppm] pro všechny tři způsoby rozkladu. Testujte nulovou hypotézu H_0, že způsob rozkladu neovlivňuje významně stanovení zinku.

○ *Data:*

	Obsah zinku v pšenici [ppm]		
i	mineralizace za mokra	suché zpopelnění	tlaková mineralizace
	x_1	x_2	x_3
1	38.8	36.4	38136
2	42.7	33.6	32.5
3	41.1	35.7	34.8
4	42.8	37.1	37.9
5	55.3	36.0	37.0
6	41.6	31.8	37.9

○ *Řešení:* Označíme-li střední hodnotu znaku x_1 jako μ_1 a podobně střední hodnotu x_2 jako μ_2 a u x_3 jako μ_3, můžeme přepsat uvedenou nulovou hypotézu na tvar H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$. Předpokládejme, že hodnoty x_{ij}, $j = 1, 2, 3$, pocházejí z třírozměrného normálního rozdělení.

Odhady středních hodnot jsou $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (43.717,\quad 35.1,\quad 35.1)$ a odpovídající matice $\boldsymbol{S} = (n-1)^{-1}\,\boldsymbol{V}$, respektive $\boldsymbol{S}^{-1}$, mají tvar

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 34.31 & 1.83 & 7.91 \\ 1.83 & 4.00 & -0.84 \\ 7.91 & -0.84 & 9.46 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.038 & -0.025 & -0.034 \\ -0.025 & 0.271 & 0.045 \\ -0.034 & 0.045 & 0.138 \end{bmatrix}.$$

Je zřejmé, že pro tento případ je $r = 1$, $m = 3$, $n = 6$.

Matice $\boldsymbol{A}$ je $\boldsymbol{A} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{i}$.

Matice $\boldsymbol{B}$ má pak tvar $\boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{i}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{i}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{V}^{-1}\,\boldsymbol{i}} = K\,\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{i}^{\mathrm{T}}$, v němž $\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{i}^{\mathrm{T}}$ je matice rozměru (3 × 3) obsahující samé jedničky. Pro koeficient K je $K = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \tilde{V}_{ij} = 0.0837$,

kde $\tilde{V}_{ij}$ jsou prvky matice $\boldsymbol{V}^{-1}$. Matice

$$\boldsymbol{V}^{-1} - \boldsymbol{V}^{-1}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0017 & -0.0049 & -0.0069 \\ -0.0049 & 0.0539 & 0.0089 \\ -0.0069 & 0.0089 & 0.0376 \end{bmatrix}$$

a

$$P_1 = \frac{4}{2}\, 6\, (43.72 \quad 35.1 \quad 35.1) \begin{bmatrix} 0.0077 & -0.0049 & -0.0069 \\ -0.0049 & 0.0539 & 0.0089 \\ -0.0069 & 0.0089 & 0.0276 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 43.72 \\ 35.1 \\ 35.1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{24}{2}\, 100.8059 = 1209.67 \; .$$

Kvantil F-rozdělení $F_{2,4}(0.95) = 6.9443$. Protože je P_1 značně vyšší, nelze přijmout hypotézu H_0 o shodě vektorů středních hodnot všech tří složek x_1, x_2, x_3.

○ *Závěr:* Způsob přípravy vzorku významně ovlivní určení obsahu zinku v pšenici.

Rozdíl průměrů tří výběrů je dle spočtené hladiny $p < 0.05$ významný.

Vícerozměrný test shodnosti pro 3 střední hodnoty

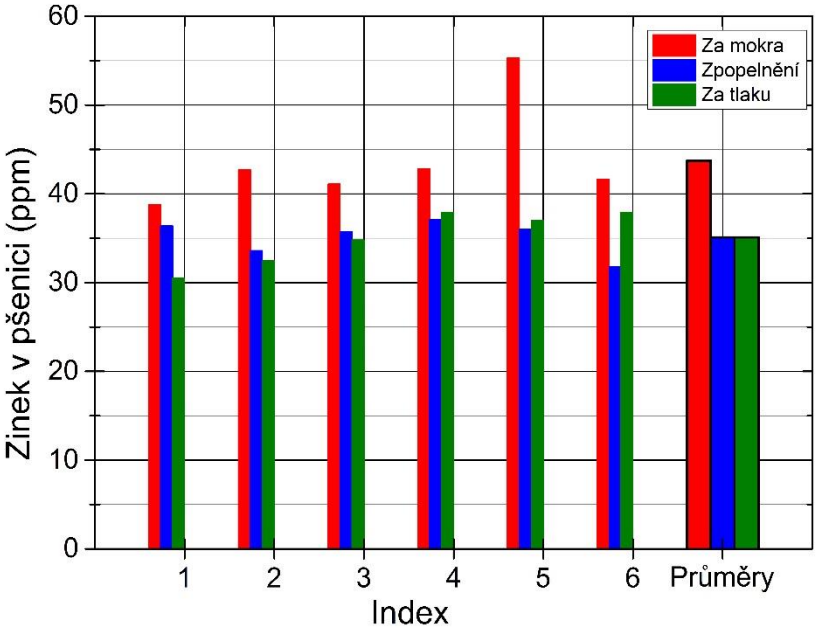
Počítačové řešení: software NCSS2007

Descriptive Statistics

Variable	Mean	S.D.
x1	43,71667	5,857445
x2	35,1	2
x3	35,1	3,075711
Count	6	6

Confidence Intervals for the Means Section

Variable	Mean	Lower 95,0% Bonferroni Conf. Limit	Upper 95,0% Bonferroni Conf. Limit
x1	43,71667	35,26558	52,16776
x2	35,1	32,21441	37,98559
x3	35,1	30,66238	39,53762



Hotelling's T2 Test Section

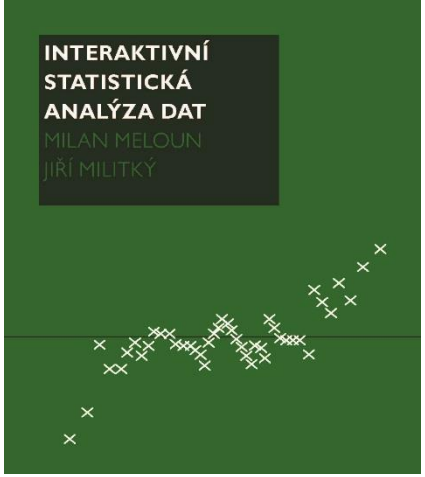
Hypothesis	T2	DF1	DF2	Parametric Test Prob Level	Randomization Test Prob Level
Means All Zero	3036,936	3	5,0	0,0001	0,0360
Means All Equal	16,640	2	5,0	0,0534	0,0601

The randomization test results are based on 1000 Monte Carlo samples.

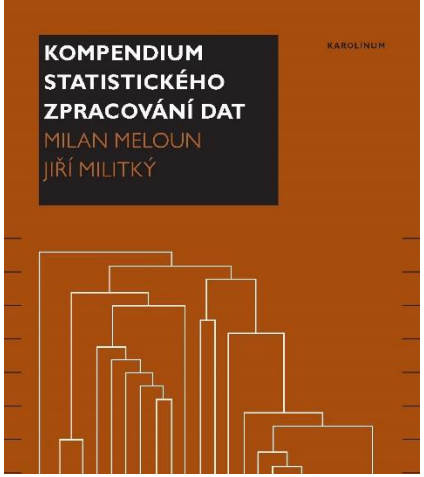
Test: Rozdíl průměrů tří výběrů je dle spočtené hladiny $p < 0.05$ významný.

Individual Variables Section

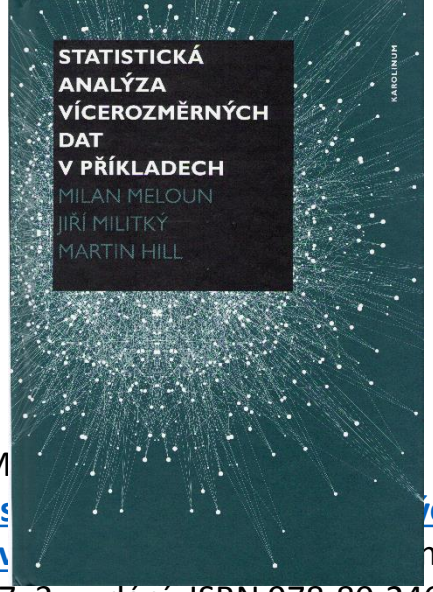
Variable Omitted	T2 Others	Prob Level	T2 Change	Prob Level	T2 Alone	Prob Level
x1	3012,735	0,0000	24,201	0,8910	334,217	0,0000
x2	826,082	0,0000	2210,854	0,1058	1848,015	0,0000
x3	1985,307	0,0000	1051,629	0,3351	781,402	0,0000



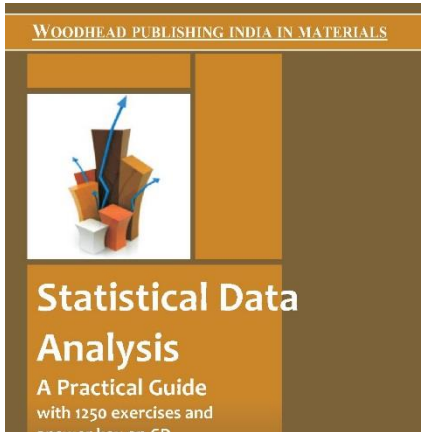
M. Meoun, J. Militký: [Interaktivní statistická analýza dat,](#) Karolinum Praha 2012, 4. vydání, včetně DVD s databazí dat 1700, 955 stran



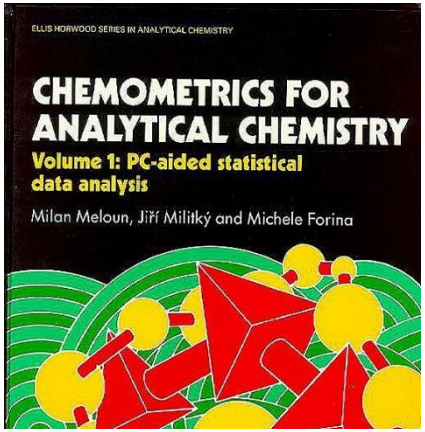
M. Meoun, J. Militký: [Kompendium statistického zpracování dat,](#) Karolinum Praha 2012, 3. vydání, včetně DVD s databazí dat 1700, 985 stran.



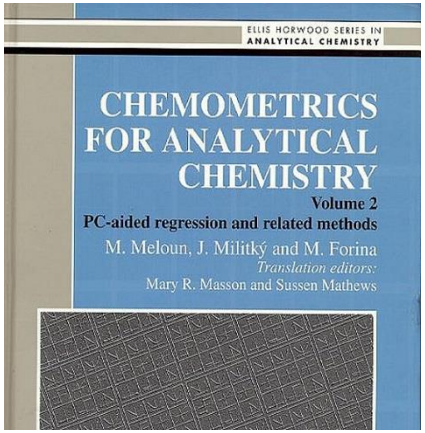
M
[Statis ch dat v](#) na 2017, 3. vydání, ISBN 978-80-246-3618-4, včetně DVD s databazí dat řešených úloh, 757 stran.



M. Meoun, J. Militký: [Statistical Data Analysis, A Practical Guide with 1250 Exercises and Answer key on CD ,](#) Woodhead Publishing India, 2011, 1600 pages, ISBN: 978-93-80308-11-1



M. Meoun, J. Militký , M. Forina: [CHEMOMETRICS FOR ANALYTICAL CHEMISTRY: Volume 1: PC-Aided Statistical Data Analysis,](#) Ellis Horwood, Chichester 1992, 330 stran, ISBN 0-13-126376-5



M. Meoun, J. Militký , M. Forina: [CHEMOMETRICS FOR ANALYTICAL CHEMISTRY. Volume 2: PC-Aided Regression and Related Methods,](#) Ellis Horwood, Chichester 1994, ISBN 0-13-123788-7

Děkuji za pozornost!

http://meloun.upce.cz