# Statistické testování parametrů polohy a rozptýlení

**Milan Meloun a Jiří Militký,**
Katedra analytické chemie, Univerzita Pardubice, 532 10 Pardubice
a
Katedra textilních materiálů, Technická univerzita Liberec,
461 17 Liberec

**Souhrn:** Statistický test prověřuje nulovou hypotézu, která je buď přijata nebo zamítnuta. Test správnosti ověřuje shodu střední hodnoty s požadovanou hodnotou, obvykle s normou. Testy shodnosti ověřují shodnost středních hodnot dvou výběrů. Párový test ověřuje shodu hodnot dvojic u párových dat. Testy jsou demonstrovány na vzorových příkladech za užití software ADSTAT a NCSS2000.

V průmyslové praxi jsou řešeny často otázky, zda změna suroviny, technologie, pracovního režimu ovlivní významně střední hodnotu znaku jakosti resp. jeho kolísání. Bývají porovnávány i dvě zkušební metody, dvě analytické metody, dvě kontrolní laboratoře, dvě laborantky. K řešení takových problémů se užívá jistá forma statistického induktivního usuzování, tj. *ověřování statistických hypotéz.*

*Statistická hypotéza* je předpoklad o rozdělení pravděpodobností jedné nebo více náhodných veličin, kdy za předpoklad se berou především charakteristiky polohy, rozptýlení a tvaru rozdělení veličiny v základním souboru. Statistickou (či *nulovou*) hypotézu $H_0$ mohou představovat např. výroky: *Náhodný výběr pochází ze základního souboru s normálním rozdělením* nebo *Rozptyly daných rozdělení ve dvou porovnávaných souborech jsou stejné.* K nulové hypotéze se formuluje ještě *alternativní hypotéza* $H_A$, která vyjadřuje opak nulové hypotézy. Statistický test má rozhodnout, zda se nulová hypotéza $H_0$ zamítne či nikoli. Alternativní hypotéza $H_A$ je hypotéza, která se přijme, když nulová hypotéza je zamitnuta.

## 1. Postup testování statistické hypotézy

1. Formulace nulové $H_0$ a alternativní hypotézy $H_A$.
2. Volba hladiny významnosti $\alpha$.
3. Volba testační statistiky, např. $t$.
4. Určení kritického oboru testové charakteristiky.
5. Vyčíslení testační statistiky a jejích kvantilů.
6. Rozhodnutí, zda
   a) Zamítnout hypotézu $H_0$ a přijmout $H_A$, jestliže testační statistika padne do kritického oboru,
   b) Nezamítnout hypotézu $H_0$, jestliže testační statistika nepadne do kritického oboru.

Výsledek testování:
a) Zamítnutí hypotézy $H_0$ neznamená, že testovaná nulová hypotéza *neplatí*, ale

znamená, že její platnosti nevěříme, protože výsledek testu poskytl objektivní důvod. V dalším pak budeme uvažovat, že $H_0$ neplatí a $H_A$ platí.

b) Nezamítneme-li hypotézu $H_0$, neznamená to její přijetí. Výsledek testu neukázal tak velkou neshodu mezi zjištěnou skutečností a testovanou hypotézou, která by dala dostatečný důvod k zamítnutí hypotézy.

Dva případy chybného rozhodnutí při testování:

a) Testační statistika padne mimo obor přijetí nulové $H_0$ hypotézy $O_p$, tj. mimo interval $$u_{\alpha/2} \leq u_s \leq u_{1-\alpha/2}$$
a hypotéza $H_0$ přitom platí. Platí-li $H_0$, je pravděpodobnost padnutí $u_s$ mimo obor $O_p$ rovna právě hladině významnosti $\alpha$. Velikost $\alpha$ určuje velikost *chyby I. druhu*, tj. nesprávného zamítnutí správné nulové hypotézy $H_0$.

b) Testační statistika padne do oboru, $O_P$, tj. mimo interval
$$u_s < u_{\alpha/2} \text{ resp. } u_s > u_{1-\alpha/2}.$$
a přitom platí alternativní hypotéza $H_A$. Pravděpodobnost, že $u_s$ padne do oboru přijetí $O_p$, i když $H_0$ neplatí, představuje velikost *chyby II. druhu*, ß.

## 2. Přehled odhadů polohy, rozptýlení a tvaru

**A. Momentové míry polohy, rozptýlení a tvaru** zahrnují:

**Míry polohy:**
- aritmetický průměr $\bar{x}$,
- vážený aritmetický průměr $\bar{x}_w$,
- uřezaný průměr $\bar{x}(\vartheta)$,
- nesymetrický uřezaný průměr $\bar{x}(\vartheta_1, \vartheta_2)$,
- M-odhady: střední hodnota $\hat{\mu}_M$,

**Míry rozptýlení (variability):**
- odhad výběrového rozptylu $s^2$,
- směrodatnou odchylku $s$,
- winsorizovaný rozptyl $s_w(\vartheta)$,
- rozptyl $D(\hat{\mu}_M)$,
- variační koeficient $\delta$,

**Míry tvaru:**
- koeficient šikmosti $\hat{g}_1$,
- koeficient špičatosti $\hat{g}_2$

**B. Kvantilové a robustní míry polohy, rozptýlení a tvaru** jsou méně citlivé na vybočující hodnoty než momentové:
- medián $\tilde{x}_{0.5}$ s odhadem rozptylu $s_M^2$,
- M-odhady: střední hodnota $\hat{\mu}_M$, rozptyl $D(\hat{\mu}_M)$ pro robustní funkce,
- interkvartilové rozpětí $R_F$,
- pro malé výběry: pivotová polosuma $P_L$, pivotové rozpětí $R_L$,

# 1. úloha: *Analýza velkého výběru*

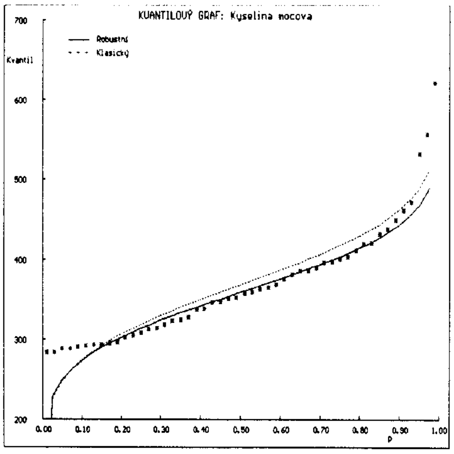
Na vzorové úloze *Koncentrace kyseliny močové v krvi dárců* ukážeme postup analýzy velkého výběru s odlehlými prvky pro určení typu rozdělení koncentrace kyseliny močové u 50 dárců krve. Jaká je míra polohy a rozptýlení uvedeného výběru?

*Data*: Koncentrace kyseliny močové [$\mu$mol/l]:

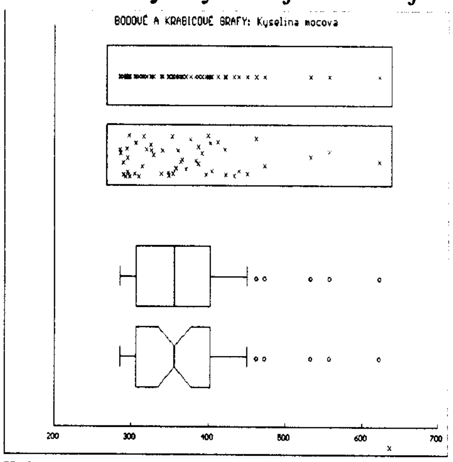
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 295 | 325 | 320 | 316 | 314 | 310 | 306 | 304 | 298 | 297 |
| 462 | 294 | 292 | 290 | 286 | 285 | 622 | 557 | 532 | 473 |
| 397 | 450 | 439 | 433 | 422 | 421 | 412 | 404 | 402 | 399 |
| 358 | 391 | 387 | 387 | 383 | 377 | 370 | 366 | 364 | 360 |
| 295 | 354 | 353 | 349 | 348 | 340 | 339 | 329 | 326 | 290 |

## 1. PRŮZKUMOVÁ (EXPLORATORNÍ) ANALÝZA DAT

Z grafických diagnostik průzkumové analýzy dat jsou uvedeny čtyři nejdůležitější.

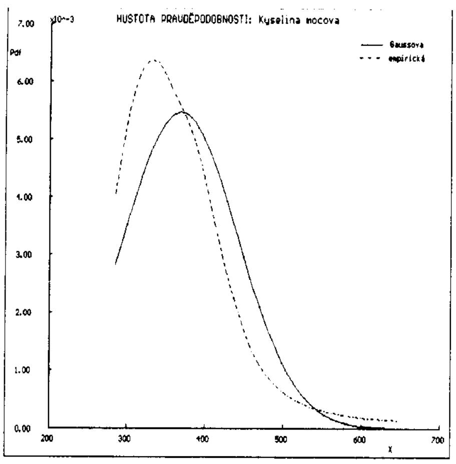



Kvantilový graf

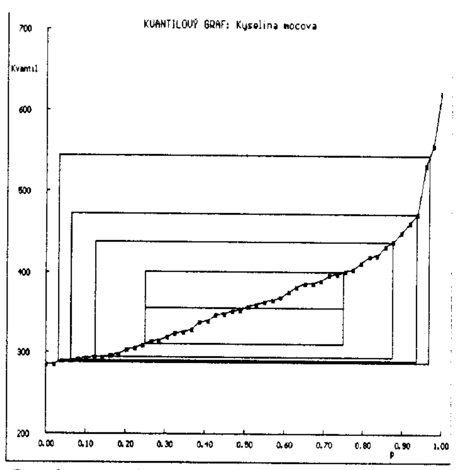


Diagramy rozptýlení a krabicové grafy

Grafy ukazují, že výběrové rozdělení je asymetrické a silně sešikmené. V horní části pořádkových statistik lze indikovat 3 až 5 podezřelých bodů, z nich se 3 jeví jako vysloveně odlehlé. Nelze proto použít klasických odhadů polohy a rozptýlení.



Graf hustoty pravděpodobnosti




Graf rozptýlení s kvantily

## 2. OVĚŘENÍ ZÁKLADNÍCH PŘEDPOKLADŮ O VÝBĚRU:

Předpoklad o normalitě rozdělení je zamítnut, protože hodnota testovacího kritéria Chi^2 je vyšší než tabulkový kvantil. Předpoklad nezávislosti je přijat, protože hodnota testovacího kritéria je nižší než tabulkový kvantil. Data nejsou homogenní, mimo modifikované vnitřní hradby $B_D$ = 109.62 $\mu$mol/l, $B_H$ = 602.38 $\mu$mol/l leží hodnota č. 17, a to 622.0 $\mu$mol/l. Po odstranění této odlehlé hodnoty by byl aritmetický průměr $\bar{x}$ = 363.29 $\mu$mol/l a směrodatná odchylka $s$ = 63.875 $\mu$mol/l. Odlehlou hodnotu nelze vyloučit, znamenalo by to totiž ztrátu informace.

Ověření základních předpokladů (výstup programu ADSTAT)

(a) TEST NORMALITY:

| | | |
|---|---|---|
| Tabulkový kvantil Chi^2(1-alfa,2) | : | 5.992 |
| Chi^2tatistika | : | 29.199 |
| Závěr: Předpoklad normality zamítnut | | |
| Vypočtená hladina významnosti | : | 4.5661E-07 |

(b) TEST NEZÁVISLOSTI:

| | | |
|---|---|---|
| Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,n+1) | : | 2.008 |
| Test autokorelace | : | 1.027 |
| Závěr: Předpoklad nezávislosti přijat | | |
| Vypočtená hladina významnosti | : | 0.1547 |

(c) DETEKCE ODLEHLÝCH BODŮ: modifikované vnitřní hradby:

| | | |
|---|---|---|
| Dolní vnitřní hradba | : | 109.62 |
| Horní vnitřní hradba | : | 602.38 |
| Bod číslo 17 (horní) | : | 622.00 |

Parametry s vynechanými odlehlými hodnotami:

| | | |
|---|---|---|
| Průměr | : | 363.29 |
| Směrodatná odchylka | : | 63.88 |
| Šikmost | : | 0.97 |
| Špičatost | : | 3.81 |

## 3. MOCNINNÁ TRANSFORMACE:

Při pokusu o transformaci dat poskytuje prostá mocninná transformace hodnotu opraveného průměru $\bar{x}_R$ = 350.91 $\mu$mol/l, zatímco Box - Coxova transformace $\bar{x}_R$ = 362.17 $\mu$mol/l, s odhadem šikmosti $g_1$ = 0.81 a špičatosti $g_2$ = 3.38, což je bližší parametrům normálního rozdělení. Věrohodnější se zde proto jeví odhad, získaný metodou Boxovy-Coxovy transformace.

Transformace dat (výstup programu ADSTAT)

(a) PROSTÁ MOCNINNÁ TRANSFORMACE:

| | | |
|---|---|---|
| Zvolená mocnina | : | -2.13 |
| Průměr | : | 3.7174E-06 |
| Směrodatná odchylka | : | 4.5175E-04 |
| Opravený průměr | : | 350.91 |

(b) BOX-COXOVA TRANSFORMACE:

| | | |
|---|---|---|
| Zvolená mocnina | : | -0.00 |
| Průměr | : | 5.8921E+00 |

| | | |
|---|---|---|
| Směrodatná odchylka | : | 1.8301E-01 |
| Opravený průměr | : | 362.17 |

## 4. ODHADY POLOHY, ROZPTYLU A TVARU:

Rozdělení souboru vykazuje mírné sešikmení. Soubor obsahuje jeden výrazně odlehlý bod. Mocninná transformace selhává, Box-Coxova transformace je robustní vůči odlehlé hodnotě. Dobrým odhadem střední hodnoty se jeví uřezané aritmetické průměry ale především retransformovaný průměr metodou dle Boxe a Coxe. Výpočet aritmetického průměru při vynechání odlehlého bodu podstatně zlepší variabilitu souboru a potvrzuje především robustnost retransformovaného průměru vůči odlehlé hodnotě.

Odhady polohy, rozptýlení a tvaru (výstup programu ADSTAT)

(a) PARAMETRY TVARU:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Šikmost | : | 1.33 | | |
| Špičatost | : | 5.00 | | |

(b) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Průměr | : | 368.46 | | |
| Směr. odchylka | : | 73.04 | | |
| 95.0% spolehlivost: Spodní mez: | 347.70 | | Horní mez: | 389.22 |

(c) OSTATNÍ ODHADY POLOHY:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Odhad modu | : | 293.00 | | |
| Odhad polosumy | : | 453.50 | | |

(d) ROBUSTNÍ ODHADY PARAMETRŮ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Medián | : | 356.00 | | |
| Směr. odchylka mediánu | : | 85.47 | | |
| Směr. odchylka mediánu | : | 14.92 | | |
| Rozptyl (Marritz) | : | 148.44 | | |
| Směr. odchylka mediánu | : | 12.18 | | |
| 95.0% spolehlivost: Spodní mez: | 331.52 | | Horní mez: | 380.48 |

Uřezání 5% (pro P=0.05):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Průměr | : | 361.38 | | |
| Směr. odchylka | : | 68.64 | | |
| Průměr, winsor. | : | 366.34 | | |
| Směr. odchylka winsor. | : | 68.11 | | |
| 95.0% spolehlivost: Spodní mez: | 340.94 | | Horní mez: | 318.20 |

Uřezání 10% (pro P=0.10):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Průměr | : | 358.35 | | |
| Směr. odchylka | : | 67.34 | | |
| Průměr, winsor. | : | 361.08 | | |
| Směr. odchylka winsor. | : | 59.48 | | |
| 95.0% spolehlivost: Spodní mez: | 339.10 | | Horní mez: | 377.60 |

Uřezání 40% (pro P=0.40):

| | | |
|---|---|---|
| Průměr | : | 356.20 |
| Směr. odchylka | : | 73.69 |

Průměr, winsor. : 355.24
Směr. odchylka winsor. : 31.26
95.0% spolehlivost: Spodní mez: 332.98 Horní mez: 379.42

Biweight:
Průměr : 358.17
Směr. odchylka : 63.09
Váhy sqrt(w) : 6.71
95.0% spolehlivost: Spodní mez: 339.29 Horní mez: 377.05

(e) ADAPTIVNÍ ODHADY PARAMETRŮ:
Hoggovy odhady:
Relativní délka konců : 2.754
Průměr : 356.46
Směr. odchylka : 72.72
95.0% spolehlivost: Spodní mez: 335.79 Horní mez: 377.13

## 2. úloha: *Analýza malých výběrů*

Na vzorové úloze *Kontrola obsahu amiakálního dusíku v odpadní vodě* ukážeme vyčíslení střední hodnoty a 95%ní interval spolehlivosti analýzou malého výběru. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme, zda je splněn požadovaný obsah amoniakálního dusíku v odpadní vodě 2.45 mg/l.

*Data:* Obsah amoniakálního dusíku [mg/l]: 2.45, 2.46, 2.46, 2.47, 2.48, 2.48, 2.49.

*Řešení:* Užijeme Hornův postup pivotů pro malé výběry (4 < n < 20):

1. *Pořádkové statistiky:*

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{(i)}$ | 2.45 | 2.46 | 2.46 | 2.47 | 2.48 | 2.48 | 2.49 |

2. *Hloubka pivotu:* n = 7, liché

$$H = int \frac{\frac{n+1}{2}}{2} \qquad int(2) \approx 2$$

3. *Pivoty:* *Dolní pivot* $x_D = x_{(H)}$ $\qquad x_{(2)} = 2.46$
*Horní pivot* $x_H = x_{(n+1-H)}$ $\qquad x_{(7)} = 2.48$

4. *Pivotová polosuma* $P_L = \dfrac{x_D + x_H}{2}$ $\qquad = 2.47$

5. *Pivotové rozpětí* $R_L = x_H - x_D$ $\qquad 2.48 - 2.46 = 0.02$

6. *95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty* $\mu$: $\qquad t_{L,\, 1-\alpha/2} = 0.72$

$$2.47 - 0.02 \times 0.72 \leq \mu \leq 2.47 + 0.02 \times 0.72$$

$$2.46 \leq \mu \leq 2.48$$

7. *Závěr:* Bodový odhad míry polohy je 2.47, míry rozptýlení 0.02 a intervalový odhad míry polohy je $2.46 \leq \mu \leq 2.48$.

## 3. Testy střední hodnoty ("testy správnosti")

### 100(1 - $\alpha$)%ní interval spolehlivosti:

Jelikož bodový odhad parametrů polohy a rozptýlení neříká nic o vzdálenosti od skutečné hodnoty $\Theta$, kterou odhadujeme pomocí bodového odhadu, je třeba konstruovat *intervalový odhad parametru*. Intervalový odhad představuje interval, ve kterém se bude se zadanou pravděpodobností či statistickou jistotou (1 - $\alpha$) nacházet skutečná hodnota daného parametru $\Theta$. Interval parametru $\Theta$ odhadujeme dvěma číselnými hodnotami $L_D$ a $L_H$, které tvoří *meze intervalu spolehlivosti*. Platí-li, že $P(L_1 < \Theta < L_2) = 1 - \alpha$, interval spolehlivosti pokryje parametr $\Theta$ s předem zvolenou pravděpodobností či statistickou jistotou $P = (1 - \alpha)$ nazvanou také *koeficient spolehlivosti*. Jeho hodnota je obyčejně rovna 0.95 nebo 0.99. Zde parametr $\alpha$ se nazývá *hladina významnosti*.

Studentův t-test správnosti analytického výsledku je možné obejít využitím intervalu spolehlivosti. Nachází-li se totiž hodnota $\mu_0$ (tj. správná hodnota, norma, standard) v intervalu spolehlivosti $[L_D; L_H]$, je stanovení správné. Pro intervalový odhad platí:

1. Čím je rozsah výběru $n$ větší, tím je interval spolehlivosti užší.
2. Čím je odhad přesnější (tj. čím má menší rozptyl), tím je interval spolehlivosti užší,
3. Čím je vyšší statistická jistota (1 - $\alpha$), tím je interval spolehlivosti širší.

**Míry polohy:** Postup konstrukce intervalu spolehlivosti střední hodnoty $\mu$ pro výběry, pocházející z normálního rozdělení N($\mu$, $\sigma^2$) se pak rozlišuje dle velikosti výběru:

*1. Velký výběr, $n \geq 30$:* bodovým odhadem střední hodnoty $\mu$ je výběrový průměr $\bar{x}$ s rozdělením N($\mu$, $\sigma^2/n$). V intervalu $\bar{x} \pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$ leží 95% hodnot náhodných veličin výběru o rozsahu $n$. Potom 95%ní *oboustranný interval spolehlivosti střední hodnoty* je vyjádřen nerovností

$$\bar{x} - 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,$$

kde hodnota 1.96 je 100(1 - 0.05/2) = 97.5%ní kvantil normovaného Gaussova normálního rozdělení $u_{0.975}$.

*2. Střední výběr, $n \leq 30$:* v praxi neznáme směrodatnou odchylku $\sigma$. Jelikož má $\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu)/s$ Studentovo $t$-rozdělení, bude 100(1 - $\alpha$)%ní *oboustranný interval spolehlivosti střední hodnoty* vyjádřen nerovností

$$\bar{x} - t_{1-\alpha/2}(\nu)\,\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(\nu)\,\frac{s}{\sqrt{n}}\,.$$

Zde symbol $t_{1-\alpha/2}(\nu)$ označuje 100(1 - $\alpha$/2)%ní kvantil Studentova rozdělení s $\nu = n - 1$ stupni volnosti. Meze intervalu spolehlivosti závisí vedle směrodatné odchylky $s$ i na rozsahu výběru $n$.

*Interval spolehlivosti mediánu* se vyčíslí podle přibližného vztahu

$$\tilde{x}_{0.5} - u_{1-\alpha/2} \frac{0.707\ s}{\sqrt{n}} \leq med \leq \tilde{x}_{0.5} + u_{1-\alpha/2} \frac{0.707\ s}{\sqrt{n}}.$$

**Míry rozptýlení:** $100(1 - \alpha)$%ní *oboustranný interval spolehlivosti rozptylu* $\sigma^2$ se vypočte dle

$$\frac{(n-1)\ s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\ s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},$$

kde $\chi^2_{1-\alpha/2}(n - 1)$ je horní a $\chi^2_{\alpha/2}(n - 1)$ dolní kvantil rozdělení $\chi^2$.

**Studentův t-test střední hodnoty:** ze základního souboru s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$ provedeme náhodný výběr rozsahu $n$ a vypočteme výběrový průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku $s$. Jako testovou statistiku zvolíme náhodnou veličinu

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}$$

Kritické obory testů polohy hypotézy $H_0$: $\mu = \mu_0$ proti různým alternativám $H_A$ pro hladinu významnosti $\alpha$ jsou uvedeny v tabulce Hraniční body kritického oboru představují $100\alpha$%ní kvantily známých rozdělení. Místo formálního testování, zda jsou tyto kvantily větší než testové statistiky, je možné přímo vyčíslit velikost pravděpodobnosti $(1 - \alpha)$ (u oboustranného testu $(1 - \alpha/2)$).

| Nulová hypotéza $H_0$ | Alternativní hypotéza $H_A$ | Testační charakteristika | Kritický obor |
|---|---|---|---|
| | $\mu > \mu_0$ | | $t \geq t_{(1-\alpha)}(n-1)$ |
| $\mu = \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ | $t = (x - \mu_0)\sqrt{n}/s$ | $t < t_\alpha(n-1)$ |
| | $\mu \neq \mu_0$ | | $\lvert t \rvert \geq t_{(1-\alpha/2)}(n-1)$ |

## 3. vzorová úloha: *Test správnosti*

Na vzorové úloze *Test správnosti koncentrace vápníku* ukážeme užití testu správnosti. Výrobce kontrolního komerčního materiálu uvádí koncentraci vápníku 2.20 mmol/1. Jsou naměřené výsledky správné ?

*Data:* Koncentrace vápníku [mmol/l]

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.26 | 2.16 | 2.18 | 2.15 | 2.23 | 2.25 | 2.19 | 2.18 | 2.16 | 2.20 | 2.19 | 2.22 | 2.19 | 2.21 | 2.25 | 2.29 | 2.26 | 2.15 | 2.18 |

*Řešení:* Z exploratorní analýzy dat byla zjištěna mírná asymetrie, posun k nižším hodnotám, v horní části řady pořádkových statistik 3 podezřelé body. Ze základních předpokladů vyplývá, že data jsou homogenní, soubor neobsahuje odlehlé hodnoty. Data mají normální rozložení a jsou nezávislá.

Analýza jednorozměrných dat na počítači (výstup programu ADSTAT)

(a) PROSTÁ MOCNINNÁ TRANSFORMACE:

| | | |
|---|---|---|
| Zvolená mocnina | : | -4.00 |
| Průměr | : | 4.2422E-02 |
| Směrodatná odchylka | : | 3.1258E-03 |
| Opravený průměr | : | 2.204 |

(b) BOX-COXOVA TRANSFORMACE:

| | | |
|---|---|---|
| Zvolená mocnina | : | -4.00 |
| Průměr | : | 2.3939E-01 |
| Směrodatná odchylka | : | 7.8145E-04 |
| Opravený průměr | : | 2.204 |

(c) PARAMETRY TVARU:

| | | |
|---|---|---|
| Šikmost | : | 0.44 |
| Špičatost | : | 2.12 |

(d) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

| | | |
|---|---|---|
| Průměr | : | 2.205 |
| Směr. odchylka | : | 0.041 |

95.0% spolehlivost: Spodní mez: 2.185 Horní mez: 2.225

(e) OSTATNÍ ODHADY POLOHY:

| | | |
|---|---|---|
| Odhad modu | : | 2.185 |
| Odhad polosumy | : | 2.220 |

(f) ROBUSTNÍ ODHADY PARAMETRŮ:

| | | |
|---|---|---|
| Medián | : | 2.190 |
| Směr. odchylka mediánu | : | 0.557 |

95.0% spolehlivost: Spodní mez: 2.161 Horní mez: 2.219

Uřezání 5% (pro P=0.05):

| | | |
|---|---|---|
| Průměr | : | 2.204 |
| Směr. odchylka | : | 0.430 |
| Průměr, winsor. | : | 2.204 |
| Směr. odchylka winsor. | : | 0.3965 |

95.0% spolehlivost: Spodní mez: 2.183 Horní mez: 2.225

Uřezání 10% (pro P=0.10):

| | | |
|---|---|---|
| Průměr | : | 2.203 |
| Směr. odchylka | : | 0.467 |
| Průměr, winsor. | : | 2.204 |
| St.odch. winsor. | : | 0.3965 |

95.0% spolehlivost: Spodní mez: 2.183 Horní mez: 2.224

Uřezání 40% (pro P=0.40):

| | | |
|---|---|---|
| Průměr | : | 2.195 |
| Směr. odchylka | : | 0.397 |
| Průměr, winsor. | : | 2.199 |
| St.odch. winsor. | : | 0.0188 |

95.0% spolehlivost: Spodní mez: 2.170 Horní mez: 2.219

Biweight:

| | | |
|---|---|---|
| Průměr | : | 2.203 |
| Směr. odchylka | : | 0.407 |
| Rozptyl | : | 1.6579E-03 |
| Váhy sqrt(w) | : | 4.170 |

95.0% spolehlivost: Spodní mez: 2.183 Horní mez: 2.224

(g) ADAPTIVNÍ ODHADY PARAMETRŮ:
Hoggovy odhady:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Relativní délka konců | : | 2.111 | | |
| Průměr | : | 2.205 | | |
| Směr. odchylka | : | 0.0414 | | |
| 95.0% spolehlivost: | Spodní mez: | 2.185 | Horní mez: | 2.225 |

*Závěr:* Pro 95%ní statistickou jistotu byly nalezeny následující intervalové odhady: pro aritmetický průměr $\bar{x}$ je interval $2.19 < \mu < 2.23$, pro medián $\tilde{x}_{0.5}$ pak $2.16 < \mu < 2.22$. Z uvedených intervalových odhadů vyplývá, že obsah vápníku 2.20 mmol/l leží v rozmezí zadané normy a naměřené výsledky jsou proto správné.

## 4. Testy shody středních hodnot ("testy shodnosti")

Porovnání dvou výběrů $\{x_i\}$, $i = 1, ..., n_1$, a $\{y_j\}$, $j = 1, ..., n_2$, patří k častým úlohám v přírodních i technických vědách, a to při
(a) porovnání výsledků z různých instrumentálních metod nebo laboratoře,
(b) ověřování nutnosti dělení heterogenních výběrů do homogenních podskupin,
(c) hodnocení rozdílu mezi rozličnými materiály a přístroji.
Někdy lze tuto úlohu převést na testování jednoho výběru. To je totiž případ, kdy mezi prvky obou výběrů existuje jistá logická vazba. Představují-li prvky $x_i$ vlastnosti před úpravou materiálu a prvky $y_i$ stejné vlastnosti po úpravě materiálu ***těchže*** vzorků ($n_1 = n_2$), lze utvořit jednorozměrný výběr, $D_i = x_i - y_i$, pro který lze užít klasickou statistickou analýzu. Pokud se střední hodnota $\mu_D$ významně neliší od nuly, znamená to, že $\mu_x = \mu_y$ a efekt zpracování materiálu není pro sledovanou vlastnost statisticky významný (t.zv. *párový test)*. V obecnějším případě dvou výběrů lze zjistit, zda pocházejí ze stejného rozdělení pravděpodobnosti a zda se neliší v parametrech polohy a rozptýlení.

**Postup testu shodnosti**

**1. Ověření normálního rozdělení obou souborů:** testy a statistické diagnostiky k ověření předpokladů o výběru,
**2. Shoda rozptylů:**
2.1 Klasický Fisher-Snedecorovým $F$-test,
2.2 Modifikovaný Fisher-Snedecorův $F$-test,
2.3 Robustní Jackknife test $F_J$,
**3. Shoda středních hodnot dvou souborů:**
3.1 Klasický Studentův $t$-test $T_1$ pro homoskedasticitu,
3.2 Klasický Studentův $t$-test $T_2$ pro heteroskedasticitu,
3.3 Modifikovaný Studentův $t$-test $T_3$ pro výběry, odchýlené od normálního rozdělení.
3.4 Robustní Jackknife test polohy $T_4$ pro homoskedasticitu,
3.5 Robustní Jackknife test polohy $T_5$ pro heteroskedasticitu,

**1. krok:** *Ověření normálního rozdělení obou výběrů*
Klasické testy vycházejí z předpokladů:
a) výběry $\{x_i\}$, $i = 1, ..., n_1$, a $\{y_j\}$, $j = 1, ..., n_2$ jsou vzájemně nezávislé;
b) rozdělení obou výběrů je normální, $x_i \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ a $y_j \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$.
Existuje řada různých metod, které jsou použitelné i v případech, kdy jsou tyto dva předpoklady narušeny. Před vlastní statistickou analýzou je výhodné vyšetřit nejprve metodami průzkumové analýzy chování obou výběrů.

**2. krok:** *Testy shody rozptylů*
**(a) Klasický F-test:** umožňuje ověření nulové hypotézy $H_0$: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ proti alternativní $H_A$: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$. Vychází se z předpokladu, že oba výběry jsou nezávislé a pocházejí z normálního rozdělení. Testovací kritérium má tvar

$$F = \max\left(\frac{s_x^2}{s_y^2}, \frac{s_y^2}{s_x^2}\right).$$

Platí-li hypotéza $H_0$ a $s_x^2 > s_y^2$, má $F$ kritérium $F$-rozdělení s $\nu_1 = (n_1 - 1)$ a $\nu_2 = (n_2 - 1)$ stupni volnosti. V opačném případě se pořadí stupňů volnosti zamění. Je-li $F > F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$, je nulová hypotéza $H_0$ o shodnosti rozptylů zamítnuta.

**(b) Modifikovaný F-test:** předchozí klasický $F$-test je značně citlivý na předpoklad normality. Mají-li obě výběrová rozdělení jinou špičatost než odpovídá normálnímu, je třeba užít kvantil $F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$ se stupni volnosti $\nu_1$ a $\nu_2$, vyčíslenými podle vztahů

$$\nu_1 = \frac{n_1 - 1}{1 + \dfrac{\hat{g}_{2c}}{2}}, \quad \nu_2 = \frac{n_2 - 1}{1 + \dfrac{\hat{g}_{2c}}{2}}$$

$$\text{kde} \quad \hat{g}_{2c} = \frac{2(n_1 + n_2)\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^4 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^4\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^2\right]^2} - 3$$

**(c) Robustní Jackknife test:** jsou-li v datech navíc odlehlé hodnoty, jeví se užitečný robustní Jackknife test. Testovací kritérium má tvar

$$F_J = \frac{n_1(\bar{z}_1 - \bar{z})^2 + n_2(\bar{z}_2 - \bar{z})^2}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(z_{1i} - \bar{z}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(z_{2i} - \bar{z}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

kde $$\bar{z} = \frac{n_1 \bar{z}_1 + n_2 \bar{z}_2}{n_1 + n_2}, \quad \bar{z}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} z_{ji}}{n_j}, \qquad j = 1, 2$$

Veličiny $z_{li}$ se počítají podle vztahu $z_{1i} = n_1 \ln s_x^2 - (n_1 - 1) \ln s_{1(i)}^2$,

kde $$s_{1(i)}^2 = \frac{1}{n_1 - 2} \sum_{j \neq i}^{n_1} (x_j - \bar{x}_{(i)})^2 .$$

Ve vztahu se vyskytuje průměr s vynechanou $i$-tou hodnotou, pro který platí

$$\bar{x}_{(i)} = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j \neq i}^{n_1} x_j .$$

Při výpočtu $z_{2i}$ se ve výše uvedených vztazích dosazují hodnoty $\{y_j\}$, $j = 1, ..., n_2$, rozptyl $s_y^2$ a rozsah výběru $n_2$.

Platí-li nulová hypotéza $H_0$, má testovací kritérium $F_J$ přibližně $F$ rozdělení s $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = n_1 + n_2 - 2$ stupni volnosti. Vyjde-li, že $F_J > F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$, je nutné zamítnout hypotézu $H_0$ o shodnosti obou výběrových rozptylů na hladině významnosti.

**3. krok:** *Shoda středních hodnot dvou souborů*
Studentův $t$-test umožňuje testování hypotézy $H_0$: $\mu_x = \mu_y$ proti alternativní $H_A$: $\mu_x \neq \mu_y$ i při splnění obou uvedených předpokladů o výběrech:

**(a) Klasický Studentův *t*-test $T_1$ pro shodné rozptyly**: pro $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ a když obě rozdělení vykazují Gaussovo rozdělení, má testovací kritérium tvar

$$T_1 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{(n_1 - 1) s_x^2 + (n_2 - 1) s_y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

Platí-li, že $T_1 > t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$, je hypotéza $H_0$ o shodě středních hodnot na hladině významnosti $\alpha$ zamítnuta.

**(b) Klasický Studentův *t*-test $T_2$ pro různé rozptyly:** pro $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ a když obě rozdělení vykazují Gaussovo rozdělení, má testovací kritérium tvar

$$T_2 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}}$$

Platí-li hypotéza $H_0$, má tato testová statistika Studentovo rozdělení s "***ekvivalentními***" stupni volnosti $\nu$

$$\nu = \frac{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}{\frac{s_x^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{s_y^4}{n_2^2(n_2 - 1)}}$$

Platí-li, že $T_2 > t_{1-\alpha/2}(\nu)$, je hypotéza $H_0$ o shodě středních hodnot na hladině významnosti $\alpha$ zamítnuta.

Testovací kritérium $T_1$ není robustní vůči heteroskedasticitě, tj. případu, kdy data jsou ve výběrech měřena s různou přesností. V této situaci je správnější užít testovacího kritéria $T_2$, které je vůči heteroskedasticitě robustnější. Na druhé straně však ekvivalentní stupně volnosti ν vycházejí menší než $n_1 + n_2 - 2$, takže síla testu $T_2$ je nižší než síla $T_1$ a vzrůstá i pravděpodobnost chyby II. druhu, ß.

**(c) Modifikovaný Studentův *t*-test $T_3$ pro výběry, odchýlené od normálního rozdělení:** jestliže jedno z rozdělení se odchyluje od normality nebo se významně liší v šikmosti od druhého, je vhodné použít modifikované testovací kritérium $T_3$

$$T_3 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}| + C + D\,(\bar{x} - \bar{y})^2}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}} ,$$

kde

$$C = \frac{1}{6}\,\frac{\frac{\hat{g}_{1x}}{n_1^2}\frac{s_x^3}{\sqrt{n_1}} - \frac{\hat{g}_{1y}}{n_2^2}\frac{s_y^3}{\sqrt{n_2}}}{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}} \quad \text{a} \quad D = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{\hat{g}_{1x}}{n_1^2}\frac{s_x^3}{\sqrt{n_1}} - \frac{\hat{g}_{1y}}{n_2^2}\frac{s_y^3}{\sqrt{n_2}}}{\left[\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right]^2}$$

V těchto vztazích jsou $\hat{g}_{1x}$ a $\hat{g}_{1y}$ výběrové šikmosti. Aby bylo možné užít kvantilů Studentova rozdělení pro předepsanou hladinu významnosti $\alpha$, je třeba přeformulovat testovací kritérium $T_3$ do tvaru

$$T_3 = T_2 + B_x - B_y,$$

kde

$$B_x = \frac{\dfrac{\hat{g}_{1x}\, s_x^3}{6\, n_1^2 \sqrt{n_1}\left[\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right]} + \dfrac{\hat{g}_{1x}\, s_x^2\,(\bar{x} - \bar{y})^2}{3\, n_2^2 \sqrt{n_2}\left[\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right]}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}}$$

a $B_y$ se vyčíslí analogicky, pouze šikmost $\hat{g}_{1x}$ se nahradí hodnotou $\hat{g}_{1y}$, rozptyl $\sigma_x^2$ hodnotou $\sigma_y^2$ a rozsah $n_1$ hodnotou $n_2$. Za předpokladu platnosti hypotézy $H_0$ má testovací kritérium $T_3$ Studentovo rozdělení s počtem stupňů volnosti $\nu$. Test založený na kritériu $T_3$ je robustní vůči sešikmení výběrových rozdělení i vůči heteroskedasticitě a není u něho požadována ani shoda rozptylů, $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$. Vůči odchylkám rozdělení od normality ve špičatosti jsou uvedené $t$-testy $T_1$, $T_2$ a $T_3$ dostatečně robustní. Je možné použít i korekcí na špičatost, které však nepřinášejí výrazné zlepšení.

**(d) Robustní Jackknife test polohy $T_4$ pro homoskedasticitu:** jsou-li ve výběrech přítomna vybočující měření, lze pro test hypotézy $H_0$: $\mu_1 = \mu_2$, a $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ upravit testovací kritérium založené na uřezaném průměru na tvar

$$T_4 = \frac{(\bar{x}(\vartheta) - \bar{y}(\vartheta))}{\sqrt{S_{w,x}(\vartheta) + S_{w,y}(\vartheta)}}$$

kde $S_{w,x}(\vartheta)$ a $S_{w,y}(\vartheta)$ se vyčíslí pro výběry $\{x_i\}$, $i = 1, ..., n_1$, a $\{y_j\}$, $j = 1, ..., n_2$. Je-li $n_1 = n_2$, má náhodná veličina $T_4$ přibližně Studentovo rozdělení s $2\,(k - 1)$ stupni volnosti. Test $T_4$ lze použít jen pro rozsah $n \geq 7$.

**(e) Robustní Jackknife test polohy $T_5$ pro heteroskedasticitu:** pro případ nestejných rozptylů $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ a nestejných rozsahů $n_1 \neq n_2$ a s využitím kritéria $T_2$ lze formulovat robustní kritérium $T_5$ pro test hypotézy $H_0$: $\mu_x = \mu_y$

$$T_5 = \frac{\bar{x}(\vartheta) - \bar{y}(\vartheta)}{\sqrt{\dfrac{s_{w,x}^2}{h_1} + \dfrac{s_{w,y}^2}{h_2}}}, \quad \text{kde} \quad s_{w,x}^2 = \frac{S_{w,x}(\vartheta)}{h_1 - 1}, \quad s_{w,y}^2 = \frac{S_{w,y}(\vartheta)}{h_2 - 1}$$

$$h_i = n_i - 2\,int\left(\frac{\vartheta\, n_i}{100}\right) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2.$$

Testovací kritérium $T_5$ má přibližně Studentovo rozdělení s $\nu$ stupni volnosti, pro které platí

$$\frac{1}{\nu} = \frac{z^2}{h_1 - 1} + \frac{(1 - z)^2}{h_2 - 1}, \text{ kde } z = \frac{\dfrac{s_{w,x}^2}{h_1}}{\dfrac{s_{w,x}^2}{h_1} + \dfrac{s_{w,y}^2}{h_2}}.$$

Robustní testy $T_4$ a $T_5$ jsou výhodné také pro rozdělení s dlouhými konci, když je špičatost větší než 3. V případě normálního rozdělení však mají menší sílu než testy $T_1$ a $T_2$.

## 4. úloha: *Test shodnosti středních hodnot dvou souborů*

(a) Na vzorové úloze *Porovnání práce dvou laborantek* ukážeme aplikaci testu shodnosti. Dvě laborantky prováděly analýzu koncentrace mukoproteinů v kontrolním vzorku. Určete, zda obě dospěly ke stejným výsledkům. Test shodnosti proveďte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

*Data:* Stanovení koncentrace mukoproteinů v g/l laborantkou A a laborantkou B:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A: | 11.6 | 12.1 | 13.2 | 12.1 | 10.6 | 13.3 | 13.7 | 14.4 | 15.2 | 13.6 | 13.7 | 12.4 | 12.5 |
| B: | 12.4 | 12.8 | 12.3 | 12.7 | 12.4 | 12.5 | 11.9 | 13.1 | 12.7 | 12.5 | 11.8 | 11.6 | 12.3 |

*Řešení:* Z ověření základních předpokladů pro jednotlivé výběry vyplývá, že data v obou výběrech jsou nezávislá, homogenní bez odlehlých bodů, test normality u obou výběrů prokázal Gaussovo rozdělení.

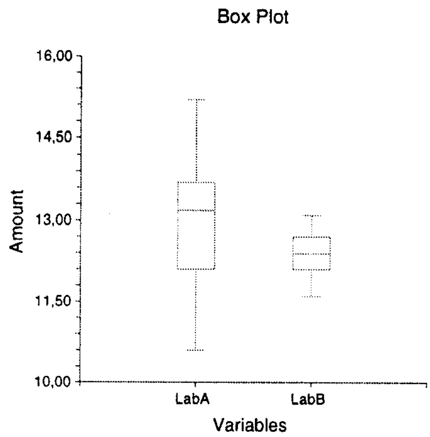
Porovnání dvou výběrů (výstup programu ADSTAT)

(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

| Parametr | Výběr č. 1 | Výběr č. 2 | Celkově |
|---|---|---|---|
| Velikost výběru | 13 | 13 | 26 |
| Průměr | 12.954 | 12.385 | 12.669 |
| Rozptyl | 1.516 | 0.1764 | 0.8124 |
| Šikmost | -0.070 | -0.344 | -0.101 |
| Špičatost | 2.58 | 2.50 | 4.21 |

(2) TEST HOMOGENITY ROZPTYLU (hypotéza H0: s1^2 = s2^2):
Fisher-Snedecor F-test:
Počet stupňů volnosti Df1 : 12
Df2 : 12
Tabulkový kvantil F(1-alfa/2,Df1,Df2) : 3.277
F-statistika : 8.594
Závěr: Rozptyly se považují za rozdílné, H0 zamítnuta

(3) TEST SHODY PRŮMĚRU (hypotéza H0: $\mu 1 = \mu 2$):
t-test(pro různé rozptyly)
Počet stupňů volnosti Df1 : 16
Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1) : 2.120
t-statistika : 1.578
Závěr: Průměry se považují za shodné, H0 přijata




Krabicový graf porovnání dvou výběrů, *NCSS2000*

Závěr: Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ potvrzuje oboustranný klasický test shodu středních hodnot obou výběrů i při významné odlišnosti obou rozptylů. Obě laborantky dosáhly stejných výsledků, i když každá s jinou variabilitou.

(b) Na vzorové úloze *Porovnání potenciometrického a jodometrického stanovení kyslíku ve vodě*, tj. potenciometricky pomocí Clarkovy kyslíkové elektrody a jodometricky titrací dle Winklera, aplikujte test shodnosti středních hodnot obou výběrů na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Jsou rozdělení obou výběrů Gaussovská? Jsou rozptyly obou výběrů stejné?

*Data:* Obsah kyslíku ve vodě [mg/l]:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pot. | 7.0 | 7.0 | 6.9 | 6.9 | 6.8 | 6.9 | 6.9 | 7.1 | 7.0 | 7.0 | 6.4 | 6.6 | 6.7 | 6.8 | 6.9 |
| | 7.1 | 7.0 | 6.9 | 6.8 | 7.1 | 6.9 | 6.6 | 6.6 | 6.6 | 6.6 | 6.8 | 6.8 | 7.3 | 6.9 | 6.7 |
| Jod. | 6.9 | 6.9 | 6.6 | 6.7 | 6.5 | 6.7 | 6.6 | 6.6 | 6.6 | 6.6 | 6.6 | 6.6 | 6.6 | 6.8 | 6.9 |
| | 7.1 | 7.0 | 6.7 | 7.4 | 7.0 | 7.1 | 7.0 | 6.7 | 7.1 | 6.9 | 6.9 | 7.1 | 7.3 | 7.1 | 7.2 |

*Řešení:* Z ověření základních předpokladů pro jednotlivé výběry vyplývá, že data v obou výběrech jsou nezávislá, homogenní bez odlehlých bodů, test normality u obou výběrů prokázal symetrické rozdělení, u prvního výběru Gaussovo rozdělení a druhého rovnoměrné rozdělení.

Porovnání dvou výběrů (výstup programu ADSTAT)

(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

| Parametr | Výběr č. 1 | Výběr č. 2 | Celkově |
|---|---|---|---|
| Velikost výběru | 30 | 30 | 60 |
| Průměr | 6.853 | 6.860 | 6.857 |
| Rozptyl | 0.0377 | 0.0597 | 0.0479 |
| Šikmost | -0.15 | 0.37 | 0.20 |
| Špičatost | 2.94 | 2.09 | 2.45 |

(2) TEST HOMOGENITY ROZPTYLU (hypotéza H0: s1^2 = s2^2):

Fisher-Snedecor F-test:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Počet stupňů volnosti | Df1 | : | 29 |
| | Df2 | : | 29 |
| Tabulkový kvantil F(1-alfa/2,Df1,Df2) | | : | 2.101 |
| F-statistika | | : | 1.582 |

Závěr: Rozptyly se považují za shodné, H0 přijata

(3) TEST SHODY PRŮMĚRU (hypotéza H0: $\mu1 = \mu2$):

t-test(pro shodné rozptyly)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Počet stupňů volnosti | Df1 | : | 58 |
| Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1) | | : | 2.001 |
| t-statistika | | : | 0.059 |

Závěr: Průměry se považují za shodné, H0 přijata

*Závěr:* Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ potvrzuje oboustranný klasický test shodu středních hodnot obou výběrů i při shodnosti obou rozptylů. Obě analytické metody stanovení kyslíku ve vodě proto vedou ke stejným výsledkům.

## 5. vzorová úloha: *Párový test*

Na vzorové úloze *Zkoušení obsahu niklu v drátu a svarovém kovu u párových dat* ukážeme párový test.

*Data:* Párová data obsahu niklu [%] (a) ve drátu, (b) ve sváru a (c) rozdíl párové hodnoty:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25.49 | 25.55 | -0.06, | 25.79 | 25.23 | 0.56, | 25.32 | 25.56 | -0.24, |
| 11.59 | 11.34 | 0.25, | 11.43 | 11.12 | 0.31, | 11.01 | 10.76 | 0.25, |
| 11.12 | 11.15 | -0.03, | 10.76 | 10.70 | 0.06, | 10.96 | 10.51 | 0.45, |
| 10.88 | 10.88 | 0.00, | 25.86 | 25.28 | 0.58, | 25.17 | 24.31 | 0.86, |
| 25.79 | 24.75 | 1.04, | 25.47 | 25.83 | -0.36, | 10.12 | 10.36 | -0.24, |
| 9.61 | 9.92 | -0.31, | 9.87 | 9.85 | 0.02, | 9.94 | 10.04 | -0.1, |
| 9.91 | 9.93 | -0.02, | 10.38 | 10.11 | 0.27, | 11.61 | 10.52 | 1.09, |
| 11.27 | 10.96 | 0.31, | 11.00 | 10.54 | 0.46, | 9.88 | 10.04 | -0.16, |
| 10.09 | 10.25 | -0.16, | 9.94 | 9.81 | 0.13, | 9.61 | 9.88 | -0.27, |
| 13.29 | 13.45 | -0.16, | 13.13 | 13.2 | -0.07, | 12.83 | 12.93 | -0.1, |
| 13.27 | 13.5 | -0.23, | 12.83 | 13.16 | -0.33, | 13.02 | 13.22 | -0.2, |
| 12.95 | 13.48 | -0.53, | 12.83 | 12.91 | -0.08, | 13.53 | 13.58 | -0.05, |
| 13.55 | 13.76 | -0.21, | 13.46 | 13.69 | -0.23, | 13.27 | 13.63 | -0.36, |
| 13.06 | 13.31 | -0.25, | 13.4 | 13.33 | 0.07, | 13.24 | 13.69 | -0.45, |
| 13.52 | 13.39 | 0.13, | 13.67 | 13.45 | 0.22, | 13.27 | 13.17 | 0.10, |

*Řešení:* Užijeme t-test (párový) v programu ADSTAT a v programu NCSS2000:

Párový test (výstup programu ADSTAT)

| | | |
|---|---|---|
| Průměrný rozdíl | : | 0.04356 |
| Rozptyl | : | 0.03003 |
| Počet stupňů volnosti Df1 | : | 44 |
| Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1) | : | 2.015 |
| t-statistika | : | 9.728 |
| Závěr: Průměry se považují za rozdílné, H0 zamítnuta | | |
| Vypočtená hladina významnosti | : | 0.000 |

*Závěr:* Párový test zamítl hypotézu o shodě obsahu niklu v drátu a svárovém kovu.

## Doporučená literatura:

1. M. Meloun, J. Militký: *Statistické zpracování experimentálních dat,* East Publishing Praha 1998, ISBN 80-7219-003-2.
2. M. Meloun, J. Militký: *Statistické zpracování experimentálních dat - Sbírka úloh,* Univerzita Pardubice 1996. ISBN 80-7194-075-5.
3. M. Meloun, J. Militký, M. Forina: *Chemometrics for Analytical Chemistry, Volume 1. PC-Aided Statistical Data Analysis*, Ellis Horwood Chichester 1992, ISBN 0-13-126376-5.
4. M. Meloun, J. Militký, M. Forina: *Chemometrics for Analytical Chemistry, Volume 2. PC-Aided Regression and Related Methods*, Ellis Horwood Chichester 1994, ISBN 0-13-123788-7.
5. Software *ADSTAT 1.25, 2.0, a verze 3.0 pro Windows 95 (1999)*, TriloByte Statistical Software s. r. o., Pardubice.
6. Software *NCSS2000 (July 1998)*, Number Cruncher Statistical Systems, Dr. Jerry L. Hintze, Kaysville, Utah, USA.