Úloha 1. Napište matici pro případ lineárního regresního spline vyjádřeného přes useknuté polynomy pro případ dvou uzlových bodů ξ_1 = 1 a ξ_2 = 4. Experimentální body jsou x = [0.2 0.4 0.6 1.5 2.0 3.0 3.5 6.0 8.0 10.0], y = [1 1 2 3 4 6 6 4 2 2].

Data: (soubor data1.xlsx)

x	y
0.2	1
0.4	1
0.6	2
1.5	3
2	4
3	6
3.5	6
6	4
8	2
10	2

Pro výpočet byl použit program **Adstat**.

Výpočet:

V menu Kalibrace byla vybrána metoda Lineární spline. Byly zadány dva uzlové body ξ_1 a ξ_2. Po té byla data aproximována třemi přímkami. Každá přímka (respektive její úsek) je charakterizována rovnicí *y=g[i]*x+h[i]* s odlišnými parametry směrnice g[i] a úseku (počátečního bodu) h[i]. Koeficient *k* určuje definiční obor funkce. Výsledná matice tedy zahrnuje parametry *k*, g[i] a h[i] pro všechny tři přímky. Proložení bodů přímkami názorně ukazuje obrázek 1.1.

Výsledky:

(1) PARAMETRY KALIBRACE:

Koeficienty rovnice : g[i]*x+h[i] pro k[i-1] < x <= k[i]

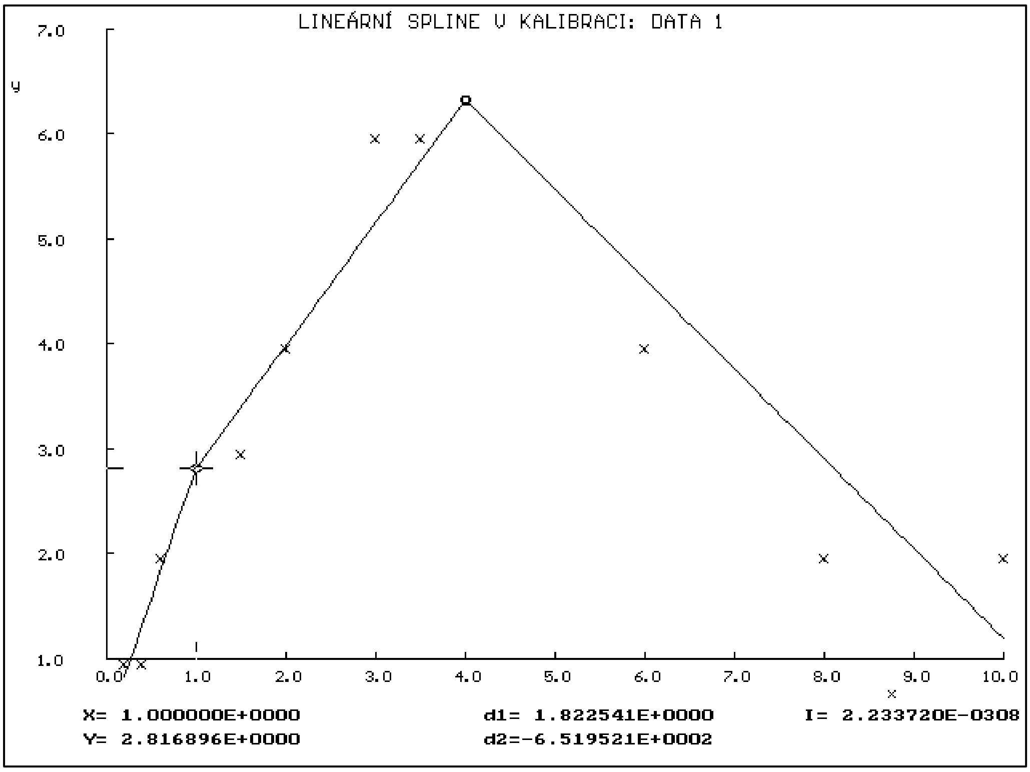
k[i]	g[i]	h[i]
1.0000E+00	2.4745E+00	3.4240E-01
4.0000E+00	1.1706E+00	1.6463E+00
1.0000E+01	-8.5614E-01	9.7532E+00

(2) ANALÝZA REZIDUÍ:

Bod	Měřená	Predikovaná	Absolutní	Relativní
	hodnota	hodnota	reziduum	reziduum
i	yexp[i]	yvyp[i]	e[i]	er[i]
1	1.0000E+00	8.3730E-01	-1.6270E-01	-1.9431E+01
2	1.0000E+00	1.3322E+00	3.3220E-01	2.4936E+01
3	2.0000E+00	1.8271E+00	-1.7290E-01	-9.4632E+00
4	3.0000E+00	3.4022E+00	4.0219E-01	1.1822E+01
5	4.0000E+00	3.9875E+00	-1.2515E-02	-3.1386E-01
6	6.0000E+00	5.1581E+00	-8.4193E-01	-1.6322E+01
7	6.0000E+00	5.7434E+00	-2.5663E-01	-4.4683E+00
8	4.0000E+00	4.6164E+00	6.1638E-01	1.3352E+01
9	2.0000E+00	2.9041E+00	9.0409E-01	3.1132E+01
10	2.0000E+00	1.1918E+00	-8.0819E-01	-6.7812E+01

Reziduální součet čtverců, RSC	: 2.9538E+00
Průměr absolutních hodnot reziduí, Me	: 4.5097E-01
Průměr relativních reziduí, Mer[%]	: 19.905
Odhad reziduálního rozptylu, s^2(e)	: 4.9230E-01
Odhad směrodatné odchylky reziduí, s(e)	: 7.0164E-01

Celé výsledky viz. CD-data1.txt a Přílohy.



Obr.1.1.: Proložení bodů pomocí lineárního splinu

Závěr:

Pomocí programu Adstat a metody lineárního splinu se podařilo proložit zadané body třemi nezávislými přímkami. Pro jednotlivé přímky byly vypočteny parametry směrnice a úseku a z těchto koeficientů byla sestavena matice. Kvalitu proložení demonstruje obrázek 1.1.

Úloha 2. Spočítejte integrál funkce $1/(1+x^2)$ pro interval [0,0.8] programem Spaeth.

Použitý program: **Adstat**

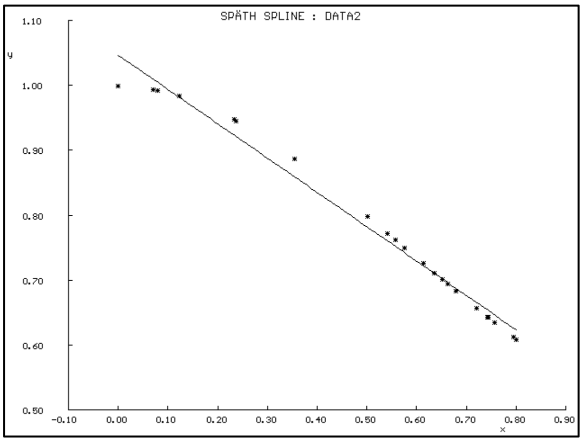
Data:

Pomocí funkce generátor náhodných čísel bylo získáno 22 hodnot v intervalu [0,0.8]. Hodnoty *y* byly vypočteny ze zadané rovnice $1/(1+x^2)$ (viz. CD data2.xlsx).

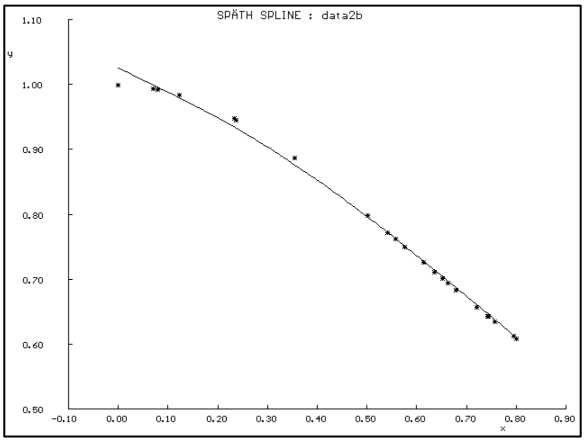
x	y
0	1
0.069633	0.995175
0.078786	0.993831
0.123323	0.985019
0.232491	0.94872
0.237807	0.946475
0.355435	0.887836
0.501722	0.798898
0.54194	0.772977
0.5571	0.763149
0.576542	0.750525
0.61347	0.726562
0.634937	0.712685
0.651022	0.702331
0.662223	0.69515
0.678806	0.684567
0.721054	0.65793
0.742689	0.644502
0.74428	0.64352
0.756761	0.635854
0.79466	0.612939
0.8	0.609756

Řešení:

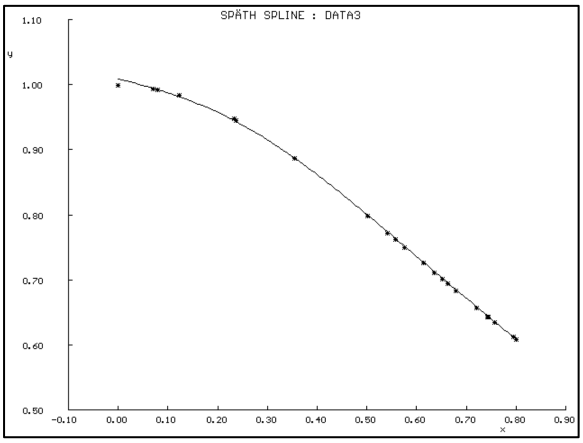
V programu Adstat v menu Vyhlazování byla zvolena metoda Späth spline. Při zadávání bylo třeba zvolit parametr vyhlazení P. U toho parametru platí, že čím se jeho hodnota blíží 0, tím se snižuje vyhlazení a spline se blíží přímce, naopak, čím vyšší je hodnota tohoto parametru, tím se zvyšuje vyhlazení a při hodnotách blížících se nekonečnu prochází spline všemi body. Pro názornost byly postupně zvoleny 4 hodnoty parametru P: 0.02, 100, 1000 a 10000. Na obrázcích 2.1-2.4 je ukázáno proložení bodů při zadání těchto 4 hodnot parametru P. Z daných obrázků vyplývá, že nejlepšího proložení bylo dosaženo při P=10000. Pro výpočet integrálu funkce $1/(1+x^2)$ byly proto použity výsledky metody Späth spline při hodnotě parametru P=10000.



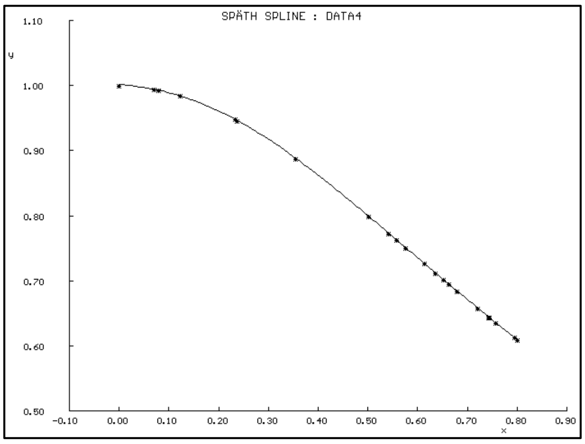
Obr.2.1. Späth spline při P=0.2



Obr.2.2. Späth spline při P=100



Obr.2.1. Späth spline při P=1000



Obr.2.2. Späth spline při P=10000

Výsledky:

(2) TABULKA DERIVACÍ A INTEGRÁLŮ:

Bod i	Nezávisle proměnná x[i]	Závisle proměnná yexp[i]	První derivace der1[i]	Druhá derivace der2[i]	Integrál int[i]
1	0.0000E+00	1.0000E+00	-9.3906E-02	0.0000E+00	0.0000E+00
2	6.9633E-02	9.9518E-01	-1.4495E-01	-1.4660E+00	6.9531E-02
3	7.8786E-02	9.9383E-01	-1.5892E-01	-1.5861E+00	7.8627E-02
4	1.2332E-01	9.8502E-01	-2.3425E-01	-1.7968E+00	1.2267E-01
5	2.3249E-01	9.4872E-01	-4.1404E-01	-1.4971E+00	2.2835E-01
6	2.3781E-01	9.4648E-01	-4.2194E-01	-1.4755E+00	2.3339E-01
7	3.5544E-01	8.8784E-01	-5.5981E-01	-8.6877E-01	3.4143E-01
8	5.0172E-01	7.9890E-01	-6.4129E-01	-2.4517E-01	4.6496E-01
9	5.4194E-01	7.7298E-01	-6.4821E-01	-9.8860E-02	4.9657E-01
10	5.5710E-01	7.6315E-01	-6.4933E-01	-4.8740E-02	5.0822E-01

11	5.7654E-01	7.5052E-01	-6.4970E-01	1.0705E-02	5.2293E-01
12	6.1347E-01	7.2656E-01	-6.4735E-01	1.1654E-01	5.5020E-01
13	6.3494E-01	7.1268E-01	-6.4424E-01	1.7345E-01	5.6565E-01
14	6.5102E-01	7.0233E-01	-6.4115E-01	2.1077E-01	5.7703E-01
15	6.6222E-01	6.9515E-01	-6.3867E-01	2.3132E-01	5.8486E-01
16	6.7881E-01	6.8457E-01	-6.3467E-01	2.5149E-01	5.9630E-01
17	7.2105E-01	6.5793E-01	-6.2373E-01	2.6634E-01	6.2466E-01
18	7.4269E-01	6.4450E-01	-6.1821E-01	2.4390E-01	6.3876E-01
19	7.4428E-01	6.4352E-01	-6.1782E-01	2.4013E-01	6.3978E-01
20	7.5676E-01	6.3585E-01	-6.1511E-01	1.9410E-01	6.4777E-01
21	7.9466E-01	6.1294E-01	-6.1116E-01	1.4781E-02	6.7143E-01
22	8.0000E-01	6.0976E-01	-6.1112E-01	-1.7347E-18	6.7469E-01

Celé výsledky viz. CD DATA2A-2D a Přílohy.

Pro výpočet integrálu proto platí:

$$\int_0^{0.8} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\mathbf{x}^2}\right) = 0.67469 - 0 = 0.67469$$

Závěr:

Metodou Späth spline byl vypočten integrál funkce $\frac{1}{1+x^2}$ v intervalu [0,0.8], je roven číslu 0.67469.

Úloha 3. Uveďte základní rozdíly mezi spline vyhlazováním a spline regresí.

U obou metod se jedná o proložení zadaných bodů vhodnou funkcí.

Při spline vyhlazování se snažíme odstranit náhodný šum z experimentálně získaného modelu. Nehledáme přesně definovanou aproximační matematickou funkci, ale snažíme se nalézt co nejtěsnější rekonstrukci bezšumové závislosti. Při spline vyhlazování jsou uzlové body ξ_i totožné s *x*-ovými souřadnicemi zadaných experimentálních dat, spliny proto ne vždy prochází uzlovými body.

Při spline regresi známe tvar fukce, odpovídající naměřeným hodnotám. Při prokládání bodů používáme po částech definovaných funkcí. Tyto funkce jsou definovány v intervalech ohraničených jednotlivými uzlovými body. Uzlovými body tedy křivka prochází.

Úloha 4. Co můžeme říct o filtru 53H.

Jedná se o robustní nelineární filtr, patřící k robustním vyhlazovacím metodám, necitlivým na hrubé chyby. Používáme jej proto k vyhlazení dat, ve kterých lze tyto hrubé nenáhodné chyby očekávat.

Při číselné fitraci vycházíme z hodnoty y_i, kde

$$\boldsymbol{y_i = Z_i^* + \varepsilon_i}$$

přičemž Z_i^* jsou skutečné deterministické hodnoty a ε_i jsou náhodné chyby. Filtrací získáváme filtrované hodnoty Z_i , kterými se rekonstruují hodnoty Z_i^*.

Rovnice filtru 53H:

$$\boldsymbol{Z_i = \frac{S(5, i-2)}{4} + \frac{S(5, i-1)}{2} + \frac{S\,(5, i)}{4}}$$

K výpočtu filtrovaných hodnot Z_i je používán medián pátého stupně, který je definován vztahem:

$$\boldsymbol{S(v, i) = med(y_{i-u}, \dots, y_i, \dots, y_{i+u})}$$

kde $u = (v-1)/2$ a *med.* označuje střed podle setříděných hodnot *y*. U mediánu pátého stupně je *v* = 5. Z uvedené rovnice je patrné, že při výpočtu mediánu pátého stupně (*v*=5) *i*-tého bodu je počítáno se dvěma předchozími body (*u*=2).