8. licenční studium
Univerzita Pardubice
Fakulta chemicko-technologická
Katedra analytické chemie

MATEMATICKÉ PRINCIPY VÍCEROZMĚRNÉ ANALÝZY DAT

Příklady:

1) Najděte vlastní (charakteristická) čísla a vlastní vektory matice A
2) Vypočtěte výběrový průměr, Wishartovu matici W a výběrovou kovarianční matici S pro n=4. Kolik různých párových korelačních koeficientů obsahuje korelační matice R.

Zpracoval: Ing. Roman Lisztwan
V Třinci dne 15.5.2001

Příklad č.1 Najděte vlastní (charakteristická) čísla a vlastní vektory matice A [řádek,sloupec]: A[1,1] = 1, A[2,1] = -2, A[1,2] = -2, A[2,2] = 1. Přesvědčte se, že jsou vlastní vektory dané matice ortogonální. Existuje matice A^{-1} . Je A regulární ?

Řešení: Cílem je zjistit, zda existují čísla λ a nenulové vektory v tak, aby vektor Av přiřazený k v danou transformací, byl roven λv (aby byl kolineární s původním vektorem v. Z charakteristické rovnice vypočteme vlastní čísla a vlastní vektory matice A. Daná matice má pro libovolné t (různé od nuly) právě dva různé lineárně nezávislé charakteristické vektory, což dokazuje nenulový determinant se souřadnic obou vektorů. Skalární součin vektorů $v_1 * v_2$ je roven nule, a tudíž jsou vlastní vektory ortogonální.
Řada maticových operací se neobejde bez inverzní matice. Nutnou a postačující podmínkou proto, aby existovala k dané čtvercové matici typu n matice inverzní je regulárnost dané matice. Je-li det A různý od 0 (tj. hodnost matice h = n, tzn., že hodnost matice A je číselně rovna maximálnímu možnému počtu lineárně nezávislých řádků matice A) pak matici A můžeme považovat za regulární. K této čtvercové regulární matici A existuje jediná inverzní matice A^{-1}, která je také regulární. K určení inverzní matice se využívá adjungované matice.

Nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů matice A
$Av = \lambda v$
$(A- \lambda E)v = 0$
Rovnici det $(\lambda E – a) = 0$ nazýváme charakteristickou rovnicí matice A.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\det A = a_{11} . a_{22} – a_{21} . a_{12} = -3$

Výpočet vlastních čísel:

$$A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$(1-\lambda)^2 – 4 = 0$
$\lambda^2 -2\lambda - 3 = 0$
$\lambda_1 = 3$
$\lambda_2 = -1$

Výpočet vlastních vektorů:

pro $\lambda_1 = 3$

$$A = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$- 2 v_1 - 2 v_2 = 0$
$- v_1 - v_2 = 0$
$v_1 = - v_2$

$v_1 = | t, -t |$

pro $\lambda_2 = -1$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$2 v_1 - 2 v_2 = 0$
$v_1 - v_2 = 0$
$v_1 = v_2$

$v_2 = | t, t |$

$$\det V = \begin{vmatrix} t & -t \\ t & t \end{vmatrix} = 2t^2 \neq 0, \text{ pro } t \neq 0$$

pro t = 1

$v_1 = \begin{vmatrix} 1, -1 \end{vmatrix}$ $v_2 = \begin{vmatrix} 1, 1 \end{vmatrix}$

Nalezení inverzní matice k matici A

$A^{-1} = 1/\det A \,.\, \operatorname{adj} A$

$\det A = a_{11}.\, a_{22} - a_{21}.\, a_{12}$

$$\operatorname{adj} A = \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} \qquad |A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = 1/3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 \end{vmatrix}$$

Závěr: Vlastní vektory matice a jsou ortogonální. K matici A existuje matice inverzní. Matice A je regulární.

Příklad č.2 Je dán náhodný výběr o rozsahu n = 4. Vypočtěte výběrový průměr, Wishartovu matici W a výběrovou kovarianční matici S. Kolik různých párových korelačních koeficientů obsahuje korelační matice R.

Data:

V4 (p=2) =

$x_i =$	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
$x_j =$	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}

V4 (p=3) =

$x_i =$	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
$x_j =$	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
$x_k =$	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{44}

V4 (p=2) =

$x_i =$	1	0	1	2
$x_j =$	1	2	-2	0

V4 (p=3) =

$x_i =$	1	0	1	2
$x_j =$	1	2	-2	0
$x_k =$	2	1	0	-1

Řešení: K výpočtu byly použity dva výběry o rozsahu n = 4 pro p = 2 a pro p = 3. U vícerozměrných náhodných veličin lze jednotlivé složky náhodného vektoru **x** charakterizovat pomocí momentů. K odvození kovariance vyjdeme z charakteristiky variability (disperze) a její vlastnosti. Pomocí Whishartovy matice dospějeme k výběrové kovarianční matici S a následně ke korelační matici R. Kovarianční matice má na diagonále rozptyly a charakterizuje míru intenzity vztahu mezi složkami náhodného vektoru **x**. Korelační matice má na diagonále jedničky a je zvláštním případem kovariance (normovaná verze kovarianční matice). Pokud je absolutní hodnota párového korelačního koeficientu $\rho_{x_i\, x_j}$ rovna 1 pak existuje mezi x_i a x_j přesně lineární vztah, je-li roven 0 pak x_i a x_j jsou vzájemně nekorelované.

Výpočet pro p = 2

Charakteristika polohy X-střední hodnota: $\bar{E}X$

Výpočet výběrového průměru $\bar{x}_i = 1/n \sum x_i$, $\bar{x}_j = 1/n \sum x_j$

Charakteristika variability X-rozptyl: DX=E(X-EX)^2

Výpočet výběrového rozptylu $s_i^2 = 1/(n-1)\sum (x_i - \bar{x}_i)^2$, $s_j^2 = 1/(n-1)\sum (x_j - \bar{x}_j)^2$

Vlastnosti disperze pro p = 2

D(X+Y) = E[(X+Y) – E(X+Y)]^2 = E[(X-EX) + (Y-EY)]^2 = E[(X-EX)^2 +2(X-EX)(Y-EY) + (Y-EY)^2] = DX + 2E(X-EX)(Y-EY) + DY

Charakteristika vztahu mezi X, Y-kovariance: $\overline{\text{c}}$ov(X,$\bar{Y}$) = E(X-EX)(Y-EY)

Výpočet výběrové kovariance $s_{ij} = 1/(n-1)\sum (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)$

Standardizace kovariance - párový korelační koeficient $\rho_{XY} = \rho(X,Y) = \text{cov}(X,Y) / \sigma_X \sigma_Y$

Whishartova matice -W= $\sum (x - \bar{x})(x - \bar{x})^T$

Kovarianční matice - S = W/(n-1)

Whishartova matice -W

$$W = \begin{vmatrix} w_{ii} & w_{ji} \\ w_{ij} & w_{jj} \end{vmatrix}$$

$$w_{ii} = \sum (x_i - \bar{x}_i)^2$$
$$w_{jj} = \sum (x_j - \bar{x}_j)^2$$
$$w_{ij} = w_{ji} = \sum (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)$$

Kovarianční matice - S

$$S = \begin{vmatrix} s_{ii} & s_{ji} \\ s_{ij} & s_{jj} \end{vmatrix}$$

$$s_{ii} = 1/(n-1)\sum (x_i - \bar{x}_i)^2$$
$$s_{ij} = 1/(n-1)\sum (x_j - \bar{x}_j)^2$$
$$s_{jj} = s_{ji} = 1/(n-1)\sum (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)$$

Korelační matice - R

$$R = \begin{vmatrix} r_{ii} & r_{ji} \\ r_{ij} & r_{jj} \end{vmatrix}$$

$$r_{ii} = 1$$
$$r_{jj} = 1$$
$$r_{ij} = r_{ji} = s_{jj}/s_{ii}\, s_{ij}$$

i,j	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^T$	$(x - \bar{x}) * (x - \bar{x})^T$

$$\begin{vmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} x_{11} - \bar{x}_i \\ x_{21} - \bar{x}_j \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} x_{11} - \bar{x}_i \\ x_{21} - \bar{x}_j \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_{11} - \bar{x}_i;\ x_{21} - \bar{x}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_{11} - \bar{x}_i)^2 & (x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{11} - x_i) \\ (x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{11} - \bar{x}_i) & (x_{21} - \bar{x}_j)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} x_{12} - \bar{x}_i \\ x_{22} - \bar{x}_j \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} x_{12} - \bar{x}_i \\ x_{22} - \bar{x}_j \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_{12} - \bar{x}_i;\ x_{22} - \bar{x}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_{12} - \bar{x}_i)^2 & (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{12} - x_i) \\ (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{12} - \bar{x}_i) & (x_{22} - \bar{x}_j)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_{13} \\ x_{23} \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} x_{13} - \bar{x}_i \\ x_{23} - \bar{x}_j \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} x_{13} - \bar{x}_i \\ x_{23} - \bar{x}_j \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_{13} - \bar{x}_i;\ x_{23} - \bar{x}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_{13} - \bar{x}_i)^2 & (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{13} - x_i) \\ (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{13} - \bar{x}_i) & (x_{23} - \bar{x}_j)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_{14} \\ x_{24} \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} x_{14} - \bar{x}_i \\ x_{24} - \bar{x}_j \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} x_{14} - \bar{x}_i \\ x_{24} - \bar{x}_j \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_{14} - \bar{x}_i;\ x_{24} - \bar{x}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_{14} - \bar{x}_i)^2 & (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{14} - x_i) \\ (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{14} - \bar{x}_i) & (x_{24} - \bar{x}_j)^2 \end{vmatrix}$$

Wishartova matice W

$$W = \begin{vmatrix} (x_{11} - \bar{x}_i)^2 + (x_{12} - \bar{x}_i)^2 + (x_{13} - \bar{x}_i)^2 + (x_{14} - \bar{x}_i)^2 & \begin{matrix}(x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{11} - \bar{x}_i) + (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{12} - \bar{x}_i) + \\ (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{13} - \bar{x}_i) + (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{14} - \bar{x}_i)\end{matrix} \\ \begin{matrix}(x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{11} - \bar{x}_i) + (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{12} - \bar{x}_i) + \\ (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{13} - \bar{x}_i) + (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{14} - \bar{x}_i)\end{matrix} & (x_{21} - \bar{x}_j)^2 + (x_{22} - \bar{x}_j)^2 + (x_{23} - \bar{x}_j)^2 + (x_{24} - \bar{x}_j)^2 \end{vmatrix}$$

Kovarianční matice S

$$S = 1/(n-1) \begin{vmatrix} (x_{11} - \bar{x}_i)^2 + (x_{12} - \bar{x}_i)^2 + (x_{13} - \bar{x}_i)^2 + (x_{14} - \bar{x}_i)^2 & \begin{matrix}(x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{11} - \bar{x}_i) + (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{12} - \bar{x}_i) + \\ (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{13} - \bar{x}_i) + (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{14} - \bar{x}_i)\end{matrix} \\ \begin{matrix}(x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{11} - \bar{x}_i) + (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{12} - \bar{x}_i) + \\ (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{13} - \bar{x}_i) + (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{14} - \bar{x}_i)\end{matrix} & (x_{21} - \bar{x}_j)^2 + (x_{22} - \bar{x}_j)^2 + (x_{23} - \bar{x}_j)^2 + (x_{24} - \bar{x}_j)^2 \end{vmatrix}$$

Korelační matice R

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \begin{matrix}[(x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{11} - \bar{x}_i) + (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{12} - \bar{x}_i) + \\ (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{13} - \bar{x}_i) + (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{14} - \bar{x}_i)]/ \\ (n-1)\ [(((x_{11} - \bar{x}_i)^2 + (x_{12} - \bar{x}_i)^2 + (x_{13} - \bar{x}_i)^2 + \\ (x_{14} - \bar{x}_i)^2)/(n-1))^{-1/2} * ((x_{21} - \bar{x}_j)^2 + (x_{22} - \bar{x}_j)^2 \\ + (x_{23} - \bar{x}_j)^2 + (x_{24} - \bar{x}_j)^2)/(n-1))^{-1/2}]\end{matrix} \\ \begin{matrix}[(x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{11} - \bar{x}_i) + (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{12} - \bar{x}_i) + \\ (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{13} - \bar{x}_i) + (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{14} - \bar{x}_i)]/ \\ (n-1)[(((x_{11} - \bar{x}_i)^2 + (x_{12} - \bar{x}_i)^2 + (x_{13} - \bar{x}_i)^2 + \\ (x_{14} - \bar{x}_i)^2)/(n-1))^{-1/2} * (((x_{21} - \bar{x}_j)^2 + (x_{22} - \bar{x}_j)^2 \\ + (x_{23} - \bar{x}_j)^2 + (x_{24} - \bar{x}_j)^2)/(n-1))^{-1/2}]\end{matrix} & 1 \end{vmatrix}$$

i,j	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})$		$(x - \overline{x})^T$		$(x - \overline{x}) * (x - \overline{x})^T$	
1	0	0	*	0; 0,75	=	0	0
1	0,75	0,75				0	0,56
0	-1	-1	*	-1; 1,75	=	1	-1,75
2	1,75	1,75				-1,75	3,06
1	0	0	*	0; -2,25	=	0	-0,25
-2	-2,25	-2,25				0	0,06
2	1	1	*	1; -0,25	=	1	-0,25
0	-0,25	-0,25				-0,25	0,06

$$\underline{\overline{x}} = \begin{vmatrix} \overline{x}_i \\ \overline{x}_j \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0,25 \end{matrix} \Bigg|$$

Whishartova matice -W

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8,75 \end{vmatrix}$$

Kovarianční matice - S

$$S = \begin{vmatrix} 0,67 & -0,67 \\ -0,67 & 2,92 \end{vmatrix}$$

Korelační matice - R

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -0,478 \\ -0,478 & 1 \end{vmatrix}$$

Výpočet pro p = 3

$$V4\ (p=3) = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i = & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_j = & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_k = & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{44} \end{array}\right|$$

$$V4\ (p=3) = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i = & 1 & 0 & 1 & 2 \\ x_j = & 1 & 2 & -2 & 0 \\ x_k = & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right|$$

Výpočet výběrového průměru $\overline{x_i} = 1/n \sum x_i$, $\overline{x_j} = 1/n \sum x_j$, $\overline{x_k} = 1/n \sum x_k$

$$\overline{x} = \left|\begin{array}{c|c} \overline{x_i} & 1 \\ \overline{x_j} & 0{,}25 \\ \overline{x_k} & 0{,}50 \end{array}\right|$$

Vlastnosti disperze

$D(X+Y+Z) = E[(X+Y+Z) – E(X+Y+Z)]^2 = E[(X-EX) + (Y-EY) + (Z-EZ)]^2 = E[(X-EX)^2 +2(X-EX)(Y-EY) + 2(X-EX)(Z-EZ) + (Y-EY)^2 + 2(Y-EY)(Z-EZ) + (Z-EZ)^2] = DX + 2E(X-EX)(Y-EY) + 2(X-EX)(Z-EZ) + 2(Y-EY)(Z-EZ) + DY + DZ$

Kovariance - $cov(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY)$
- $cov(X,Z) = E(X-EX)(Z-EZ)$
- $cov(Y,Z) = E(Y-EY)(Z-EZ)$

Korelace - $\rho(X,Y) = cov(X,Y) / \sigma_X \sigma_Y$
- $\rho(X,Y) = cov(X,Z) / \sigma_X \sigma_Z$
- $\rho(X,Y) = cov(Y,Z) / \sigma_Y \sigma_Z$

Whishartova matice -W

$$W = \left|\begin{array}{ccc} w_{ii} & w_{ji} & w_{ki} \\ w_{ij} & w_{jj} & w_{kj} \\ w_{ik} & w_{jk} & w_{kk} \end{array}\right|$$

Kovarianční matice - S

$$S = \left|\begin{array}{ccc} s_{ii} & s_{ji} & s_{ki} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{kj} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} \end{array}\right|$$

Korelační matice - R

$$R = \left|\begin{array}{ccc} r_{ii} & r_{ji} & r_{ki} \\ r_{ij} & r_{jj} & r_{kj} \\ r_{ik} & r_{jk} & r_{kk} \end{array}\right|$$

$w_{ii} = \sum (x_i - \overline{x_i})^2$

$w_{jj} = \sum (x_j - \overline{x_j})^2$

$w_{kk} = \sum (x_k - \overline{x_k})^2$

$w_{ij} = w_{ji} = \sum (x_i - \overline{x_i})(x_j - \overline{x_j})$

$w_{ik} = w_{ki} = \sum (x_i - \overline{x_i})(x_k - \overline{x_k})$

$w_{jk} = w_{kj} = \sum (x_j - \overline{x_j})(x_k - \overline{x_k})$

$s_{ii} = 1/(n-1)\sum (x_i - \overline{x_i})^2$

$s_{ij} = 1/(n-1)\sum (x_j - \overline{x_j})^2$

$s_{kk} = 1/(n-1)\sum (x_k - \overline{x_k})^2$

$s_{ij} = s_{ji} = 1/(n-1)\sum (x_i - \overline{x_i})(x_j - \overline{x_j})$

$s_{ik} = s_{ki} = 1/(n-1)\sum (x_i - \overline{x_i})(x_k - \overline{x_k})$

$s_{jk} = s_{kj} = 1/(n-1)\sum (x_j - \overline{x_j})(x_k - \overline{x_k})$

$r_{ii} = 1$

$r_{jj} = 1$

$r_{kk} = 1$

$r_{ij} = r_{ji} = s_{ij}/s_{ii}\, s_{jj}$

$r_{ik} = r_{ki} = s_{ik}/s_{ii}\, s_{kk}$

$r_{jk} = r_{kj} = s_{jk}/s_{jj}\, s_{kk}$

i,j,k	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})$		$(x - \bar{x})^T$
$\begin{vmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_{11} - \bar{x}_i \\ x_{21} - \bar{x}_j \\ x_{31} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_{11} - \bar{x}_i \\ x_{21} - \bar{x}_j \\ x_{31} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$	*	$\begin{vmatrix} x_{11} - \bar{x}_i; x_{21} - \bar{x}_j; x_{31} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_{12} - \bar{x}_i \\ x_{22} - \bar{x}_j \\ x_{32} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_{12} - \bar{x}_i \\ x_{22} - \bar{x}_j \\ x_{32} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$	*	$\begin{vmatrix} x_{12} - \bar{x}_i; x_{22} - \bar{x}_j; x_{32} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_{13} - \bar{x}_i \\ x_{23} - \bar{x}_j \\ x_{33} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_{13} - \bar{x}_i \\ x_{23} - \bar{x}_j \\ x_{33} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$	*	$\begin{vmatrix} x_{13} - \bar{x}_i; x_{23} - \bar{x}_j; x_{33} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} x_{14} \\ x_{24} \\ x_{34} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_{14} - \bar{x}_i \\ x_{24} - \bar{x}_j \\ x_{34} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_{14} - \bar{x}_i \\ x_{24} - \bar{x}_j \\ x_{34} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$	*	$\begin{vmatrix} x_{14} - \bar{x}_i; x_{24} - \bar{x}_j; x_{34} - \bar{x}_k \end{vmatrix}$

$(x - \bar{x}) * (x - \bar{x})^T$

$$\begin{vmatrix} (x_{11} - \bar{x}_i)^2 & (x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{11} - \bar{x}_i) & (x_{31} - \bar{x}_k)*(x_{11} - \bar{x}_i) \\ (x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{11} - \bar{x}_i) & (x_{21} - \bar{x}_j)^2 & (x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{31} - \bar{x}_k) \\ (x_{31} - \bar{x}_k)*(x_{11} - \bar{x}_i) & (x_{21} - \bar{x}_j)*(x_{31} - \bar{x}_k) & (x_{31} - \bar{x}_k)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (x_{12} - \bar{x}_i)^2 & (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{12} - \bar{x}_i) & (x_{32} - \bar{x}_k)*(x_{12} - \bar{x}_i) \\ (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{12} - \bar{x}_i) & (x_{22} - \bar{x}_j)^2 & (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{32} - \bar{x}_k) \\ (x_{32} - \bar{x}_k)*(x_{12} - \bar{x}_i) & (x_{22} - \bar{x}_j)*(x_{32} - \bar{x}_k) & (x_{32} - \bar{x}_k)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (x_{13} - \bar{x}_i)^2 & (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{13} - \bar{x}_i) & (x_{33} - \bar{x}_k)*(x_{13} - \bar{x}_i) \\ (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{13} - \bar{x}_i) & (x_{23} - \bar{x}_j)^2 & (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{33} - \bar{x}_k) \\ (x_{33} - \bar{x}_k)*(x_{13} - \bar{x}_i) & (x_{23} - \bar{x}_j)*(x_{33} - \bar{x}_k) & (x_{33} - \bar{x}_k)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (x_{14} - \bar{x}_i)^2 & (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{14} - \bar{x}_i) & (x_{34} - \bar{x}_k)*(x_{14} - \bar{x}_i) \\ (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{14} - \bar{x}_i) & (x_{24} - \bar{x}_j)^2 & (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{34} - \bar{x}_k) \\ (x_{34} - \bar{x}_k)*(x_{14} - \bar{x}_i) & (x_{24} - \bar{x}_j)*(x_{34} - \bar{x}_k) & (x_{34} - \bar{x}_k)^2 \end{vmatrix}$$

Wishartova matice

$$W = \begin{vmatrix} (x_{11}-\bar{x}_i)^2+(x_{12}-\bar{x}_i)^2+(x_{13}-\bar{x}_i)^2+(x_{14}-\bar{x}_i)^2 & (x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{14}-\bar{x}_i) & (x_{31}-\bar{x}_k)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{32}-\bar{x}_k)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{33}-\bar{x}_k)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{34}-\bar{x}_k)*(x_{14}-\bar{x}_i) \\ (x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{14}-\bar{x}_i) & (x_{21}-\bar{x}_j)^2+(x_{22}-\bar{x}_j)^2+(x_{23}-\bar{x}_j)^2+(x_{24}-\bar{x}_j)^2 & (x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{31}-\bar{x}_k)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{32}-\bar{x}_k)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{33}-\bar{x}_k)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{34}-\bar{x}_k) \\ (x_{31}-\bar{x}_k)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{32}-\bar{x}_k)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{33}-\bar{x}_k)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{34}-\bar{x}_k)(x_{14}-\bar{x}_i) & (x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{31}-\bar{x}_k)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{32}-\bar{x}_k)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{33}-\bar{x}_k)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{34}-\bar{x}_k) & (x_{31}-\bar{x}_k)^2+(x_{32}-\bar{x}_k)^2+(x_{33}-\bar{x}_k)^2+(x_{44}-\bar{x}_k)^2 \end{vmatrix}$$

Kovarianční matice S

$$S = 1/(n-1) \begin{vmatrix} (x_{11}-\bar{x}_i)^2+(x_{12}-\bar{x}_i)^2+(x_{13}-\bar{x}_i)^2+(x_{14}-\bar{x}_i)^2 & (x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{14}-\bar{x}_i) & (x_{31}-\bar{x}_k)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{32}-\bar{x}_k)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{33}-\bar{x}_k)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{34}-\bar{x}_k)*(x_{14}-\bar{x}_i) \\ (x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{14}-\bar{x}_i) & (x_{21}-\bar{x}_j)^2+(x_{22}-\bar{x}_j)^2+(x_{23}-\bar{x}_j)^2+(x_{24}-\bar{x}_j)^2 & (x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{31}-\bar{x}_k)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{32}-\bar{x}_k)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{33}-\bar{x}_k)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{34}-\bar{x}_k) \\ (x_{31}-\bar{x}_k)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{32}-\bar{x}_k)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{33}-\bar{x}_k)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{34}-\bar{x}_k)*(x_{14}-\bar{x}_i) & (x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{31}-\bar{x}_k)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{32}-\bar{x}_k)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{33}-\bar{x}_k)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{34}-\bar{x}_k) & (x_{31}-\bar{x}_k)^2+(x_{32}-\bar{x}_k)^2+(x_{33}-\bar{x}_k)^2+(x_{44}-\bar{x}_k)^2 \end{vmatrix}$$

Korelační matice R

$$R = \begin{vmatrix} 1 & [(x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{14}-\bar{x}_i)]/(n-1)[(((x_{11}-\bar{x}_i)^2+(x_{12}-\bar{x}_i)^2+(x_{13}-\bar{x}_i)^2+(x_{14}-\bar{x}_i)^2)/(n-1))^{-1/2}*(((x_{21}-\bar{x}_j)^2+(x_{22}-\bar{x}_j)^2+(x_{23}-\bar{x}_j)^2+(x_{24}-\bar{x}_j)^2)/(n-1))^{-1/2}] & [(x_{31}-\bar{x}_k)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{32}-\bar{x}_k)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{33}-\bar{x}_k)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{34}-\bar{x}_k)*(x_{14}-\bar{x}_i)]/(n-1)[(((x_{11}-\bar{x}_i)^2+(x_{12}-\bar{x}_i)^2+(x_{13}-\bar{x}_i)^2+(x_{14}-\bar{x}_i)^2)/(n-1))^{-1/2}*(((x_{31}-\bar{x}_k)^2+(x_{32}-\bar{x}_k)^2+(x_{33}-\bar{x}_k)^2+(x_{44}-\bar{x}_k)^2)/(n-1))^{-1/2}] \\ [(x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{14}-\bar{x}_i)]/(n-1)[(((x_{11}-\bar{x}_i)^2+(x_{12}-\bar{x}_i)^2+(x_{13}-\bar{x}_i)^2+(x_{14}-\bar{x}_i)^2)/(n-1))^{-1/2}*(((x_{21}-\bar{x}_j)^2+(x_{22}-\bar{x}_j)^2+(x_{23}-\bar{x}_j)^2+(x_{24}-\bar{x}_j)^2)/(n-1))^{-1/2}] & 1 & [(x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{31}-\bar{x}_k)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{32}-\bar{x}_k)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{33}-\bar{x}_k)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{34}-\bar{x}_k)]/(n-1)[(((x_{21}-\bar{x}_j)^2+(x_{22}-\bar{x}_j)^2+(x_{23}-\bar{x}_j)^2+(x_{24}-\bar{x}_j)^2)/(n-1))^{-1/2}*(((x_{31}-\bar{x}_k)^2+(x_{32}-\bar{x}_k)^2+(x_{33}-\bar{x}_k)^2+(x_{44}-\bar{x}_k)^2)/(n-1))^{-1/2}] \\ [(x_{31}-\bar{x}_k)*(x_{11}-\bar{x}_i)+(x_{32}-\bar{x}_k)*(x_{12}-\bar{x}_i)+(x_{33}-\bar{x}_k)*(x_{13}-\bar{x}_i)+(x_{34}-\bar{x}_k)*(x_{14}-\bar{x}_i)]/(n-1)[(((x_{11}-\bar{x}_i)^2+(x_{12}-\bar{x}_i)^2+(x_{13}-\bar{x}_i)^2+(x_{14}-\bar{x}_i)^2)/(n-1))^{-1/2}*(((x_{31}-\bar{x}_k)^2+(x_{32}-\bar{x}_k)^2+(x_{33}-\bar{x}_k)^2+(x_{44}-\bar{x}_k)^2)/(n-1))^{-1/2}] & [(x_{21}-\bar{x}_j)*(x_{31}-\bar{x}_k)+(x_{22}-\bar{x}_j)*(x_{32}-\bar{x}_k)+(x_{23}-\bar{x}_j)*(x_{33}-\bar{x}_k)+(x_{24}-\bar{x}_j)*(x_{34}-\bar{x}_k)]/(n-1)[(((x_{21}-\bar{x}_j)^2+(x_{22}-\bar{x}_j)^2+(x_{23}-\bar{x}_j)^2+(x_{24}-\bar{x}_j)^2)/(n-1))^{-1/2}*(((x_{31}-\bar{x}_k)^2+(x_{32}-\bar{x}_k)^2+(x_{33}-\bar{x}_k)^2+(x_{44}-\bar{x}_k)^2)/(n-1))^{-1/2}] & 1 \end{vmatrix}$$

i,j,k	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})$		$(x - \bar{x})^T$		$(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T$
$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 0{,}75 \\ 1{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 0{,}75 \\ 1{,}5 \end{vmatrix}$	*	$\begin{vmatrix} 0;\ 0{,}75;\ 1{,}5 \end{vmatrix}$	=	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}563 & 1{,}125 \\ 0 & 1{,}125 & 2{,}25 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 \\ 1{,}75 \\ 0{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 \\ 1{,}75 \\ 0{,}5 \end{vmatrix}$	*	$\begin{vmatrix} -1;\ 1{,}75;\ 0{,}5 \end{vmatrix}$	=	$\begin{vmatrix} 1 & -1{,}75 & -0{,}5 \\ -1{,}75 & 3{,}06 & 0{,}875 \\ -0{,}5 & 0{,}875 & 0{,}25 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ -2{,}25 \\ -0{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ -2{,}25 \\ -0{,}5 \end{vmatrix}$	*	$\begin{vmatrix} 0;\ -2{,}25;\ -0{,}5 \end{vmatrix}$	=	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}063 & 1{,}125 \\ 0 & 1{,}125 & 0{,}25 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ -0{,}25 \\ -1{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ -0{,}25 \\ -1{,}5 \end{vmatrix}$	*	$\begin{vmatrix} 1;\ -0{,}25;\ -1{,}5 \end{vmatrix}$	=	$\begin{vmatrix} 1 & -0{,}25 & -1{,}5 \\ -0{,}25 & 0{,}063 & 0{,}375 \\ -1{,}50 & 0{,}375 & 2{,}25 \end{vmatrix}$

Whishartova matice -W

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 8{,}75 & 3{,}5 \\ -2 & 3{,}5 & 5 \end{vmatrix}$$

Kovarianční matice - S

$$S = \begin{vmatrix} 0{,}67 & -0{,}67 & -0{,}67 \\ -0{,}67 & 2{,}92 & 1{,}17 \\ -0{,}67 & 1{,}17 & 1{,}67 \end{vmatrix}$$

Korelační matice - R

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}48 & -0{,}63 \\ -0{,}48 & 1 & 0{,}53 \\ -0{,}63 & 0{,}53 & 1 \end{vmatrix}$$

Závěr: Korelační matice pro p = 2 má dva různé korelační koeficienty a pro p = 3 má 4.