UNIVERZITA PARDUBICE
FAKULTA CHEMICKO TECHNOLOGICKÁ

MATEMATICKÉ PRINCIPY ZPARCOVÁNÍ VÍCEROZMĚRNÝCH DAT

SEMINÁRNÍ PRÁCE LICENČNÍHO STUDIA
STATISTICKÉ ZPRACOVÁNÍ DAT PŘI KONTROLE JAKOSTI

Ing. Karel Drápela, CSc.

Brno 2001

Otázka 1:

Zadání: Najděte vlastní (charakteristická) čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}$

Přesvědčte se, že jsou vlastní vektory dané matice ortogonální. Najděte matici W^T a W, kde sloupce matice W tvoří vlastní vektory matice A. Existuje matice A^{-1} ? Je A regulární ?

Výpočet:

$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$	$\vec{v}$ je vektor
$A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = \vec{o}$	λ je číslo
$\vec{v} \cdot (A - \lambda \cdot E) = \vec{o}$	$\vec{o}$ je nulový vektor
$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$	E je jednotková matice

$\det A = 2 \cdot 1 - (-6)(-1) = 8$ $\quad$ $\det A \neq 0$, matice je regulární.

Výpočet vlastních čísel

$$\det A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \det A = (2-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(-6) = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

D = 9-4.(-4) = 25 $\quad$ $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = -1$

Výpočet vlastních vektorů

Pro $\lambda_1 = 4$

$(A - 4E)\vec{v} = \vec{o}$

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right) \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$-2v_1 - v_2 = 0$

$v_1 = \dfrac{1}{2} v_2$

$$\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1/2 \end{vmatrix}$$

Pro $\lambda_1 = -1$

$(A + 1E)\vec{v} = \vec{o}$

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$-2v_1 - v_2 = 0$

$v_1 = \dfrac{1}{3} v_2$

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1/3 \end{vmatrix}$$

Toto jsou charakteristické vektory matice A.

Jestliže $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ pak jsou na sebe kolmé.

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (v_{11} \cdot v_{21}) + (v_{12} \cdot v_{22}) = (1 \cdot 1) + (1/2 \cdot 1/3) = 7/6 \neq 0$

Vektory nejsou ortogonální.

$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/3 \end{vmatrix}$ $\qquad V^T = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/3 \end{vmatrix}$

Zde jsou vlastní vektory matice A.

Matice A^{-1} existuje, protože A je čtvercová matice a u čtvercových matic lze provádět inverzi.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2a - c = 1
2b - d = 0
-6a + c = 0
-6b + d = 1

2a - c = 1
<u>-6a + c = 0</u>
-4a = 1
a = -0.25

c = 2a - 1
c = -1.5

2b - d = 0
<u>-6b + d = 1</u>
-4b = 1
b = -0.25

d = 2b
d = -0.5

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -0.25 & -0.25 \\ -1.5 & -0.5 \end{vmatrix}$$

Toto je inverzní matice k matici A.

Zkouška:

$$\begin{vmatrix} -0.25 & -0.25 \\ -1.5 & -0.5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.5+1.5 & 0.25-0.25 \\ -3+3 & 1.5-0.5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Otázka 2:

Zadání: Je dán náhodný výběr o rozsahu n = 4

$$\text{V4} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad n = 4, \quad p = 3$$

Vypočtěte výběrový průměr, Wishartovu matici W a výběrovou korelační matici S. Kolik různých párových korelačních koeficientů obsahuje korelační matice R.

Výpočet:

$$\text{Průměrný vektor} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$(x_i - \bar{x}) \cdot (x_i - \bar{x})^T = (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.25 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1 \\ -0.5 & 0.25 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 2.25 & 1.5 \\ 1 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Wishartova matice $W = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Výběrová kovarianční matice $S = \frac{1}{n-1} \cdot W = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 5/3 & 1 \\ 2/3 & 1 & 4/3 \end{bmatrix}$

Korelační matice $R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{s_{12}}{\sqrt{s_1}\sqrt{s_2}} = \frac{1/3}{\sqrt{2/3}\sqrt{5/3}}$$

$$r_{13} = r_{31} = \frac{s_{13}}{\sqrt{s_1}\sqrt{s_3}} = \frac{2/3}{\sqrt{2/3}\sqrt{4/3}}$$

$$r_{23} = r_{32} = \frac{s_{23}}{\sqrt{s_2}\sqrt{s_3}} = \frac{1}{\sqrt{5/3}\sqrt{4/3}}$$

Korelační matice R obsahuje 3 různé párové korelační koeficienty.