TESTOVÁNÍ STATISTICKÝCH HYPOTÉZ – ZÁKLADNÍ POJMY

Statistická hypotéza je určitá domněnka (předpoklad) o vlastnostech **ZÁKLADNÍHO SOUBORU**.

Test statistické hypotézy je pravidlo (kritérium), které na základě **údajů zjištěných z náhodného výběru** objektivně předepisuje rozhodnutí, má-li být **ověřovaná hypotéza zamítnuta či nikoliv**

Testování statistických hypotéz

Statistická hypotéza je ***předpoklad*** o rozdělení pravděpodobnosti jedné nebo více náhodných veličin.

Test statistické hypotézy je ***pravidlo,*** které objektivně předepisuje rozhodnutí, má-li být ověřovaná hypotéza zamítnuta či nikoliv.

Při testování statistické hypotézy se rozlišuje testovaná **nulová hypotéza** H_0 a **alternativní hypotéza** H_A.

Postup testování je vlastně zamítání alternativních hypotéz.

Sestrojuje se určitá **testovací statistika**:

1. Padne-li statistika do **oboru přijetí**, nulová hypotéza se nezamítá.
2. Padne-li statistika do **kritického oboru**, je nulová hypotéza zamítnuta.

Pravděpodobnost padnutí testovací charakteristiky do kritického oboru se nazývá **hladina významnosti** α. Vyjadřuje se v %, jako 100α%ní hladina významnosti, např. 5%ní nebo 1%ní.

Kritický obor je buď oboustranný nebo jednostranný.

Oboustranný kritický obor se vymezuje tehdy, neexistuje-li důvod, proč by testovací statistika měla mít buď jen kladné, nebo jen záporné znaménko.

Hladina významnosti α je pak rozložena na dvě stejné části o velikosti $\alpha/2$.

Testování statistické hypotézy

Postup:

1. Formulace nulové H_0 a alternativní hypotézy H_A.
2. Volba hladiny významnosti α.
3. Volba testační statistiky, např. t.
4. Určení kritického oboru testové charakteristiky, např. $t_{1-\alpha/2}(n-1)$,
5. Vyčíslení testační statistiky a jejích kvantilů.
6. Rozhodnutí, zda
   a) Zamítnout hypotézu H_0 a přijmout H_A, jestliže testační statistika padne do kritického oboru,
   b) Nezamítnout hypotézu H_0, jestliže testační statistika nepadne do kritického oboru.

Diskuse testování:

1. **Zamítnutí hypotézy H_0** neznamená, že testovaná nulová hypotéza ***neplatí***, ale znamená, že její platnosti nevěříme, protože výsledek testu poskytl objektivní důvod.

   V dalším pak budeme uvažovat, že H_0 neplatí a H_A platí.

2. **Nezamítneme-li** hypotézu H_0, neznamená to její přijetí.
   Výsledek testu neukázal tak velkou neshodu mezi zjištěnou skutečností a testovanou hypotézou, která by dala dostatečný důvod k zamítnutí hypotézy.

Formulace hypotézy: H_0: $\Theta = K$ ***vs.*** H_A: $\Theta \neq K$.

Testační statistika: $u_s = |\Theta - K| / \sqrt{D(\hat{\Theta})}$ a bude mít při platnosti nulové hypotézy H_0 normální rozdělení.

Testování: mohou nastat dva případy:

1. Testační statistika **padne do oboru přijetí nulové** H_0 hypotézy O_p, tj. do intervalu $u_{\alpha/2} \leq u_s \leq u_{1-\alpha/2}$

   a hypotéza H_0 se nezamítá.

Platí-li H_0, je pravděpodobnost padnutí u_s mimo obor O_p rovna právě hladině významnosti α.

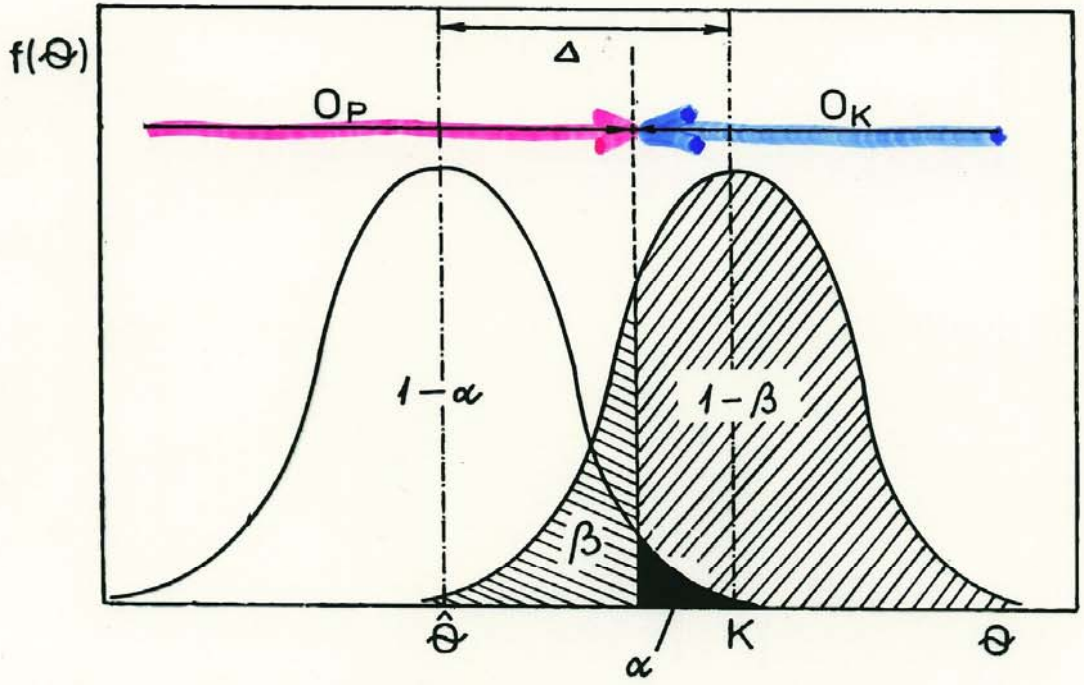
Velikost α určuje velikost **chyby I. druhu**,
tj. **nesprávného zamítnutí** správné nulové hypotézy H_0.

2. Testační statistika **padne do kritického oboru,** O_K, tj. do intervalu

$$u_s < u_{\alpha/2} \qquad \text{resp.} \qquad u_s > u_{1-\alpha/2}$$

Nulová hypotéza $\mathbf{H_0}$ **se pak zamítá** ve prospěch alternativní H_A.

Pravděpodobnost, že $\mathbf{u_s}$ **padne do oboru přijetí** O_p, i když H_0 je nesprávné, představuje velikost **chyby II. druhu**, ß.



Vztah mezi chybou I. druhu α a II. druhu ß
pro jednostrannou hypotézu: O_P přijato, O_K zamítnuto

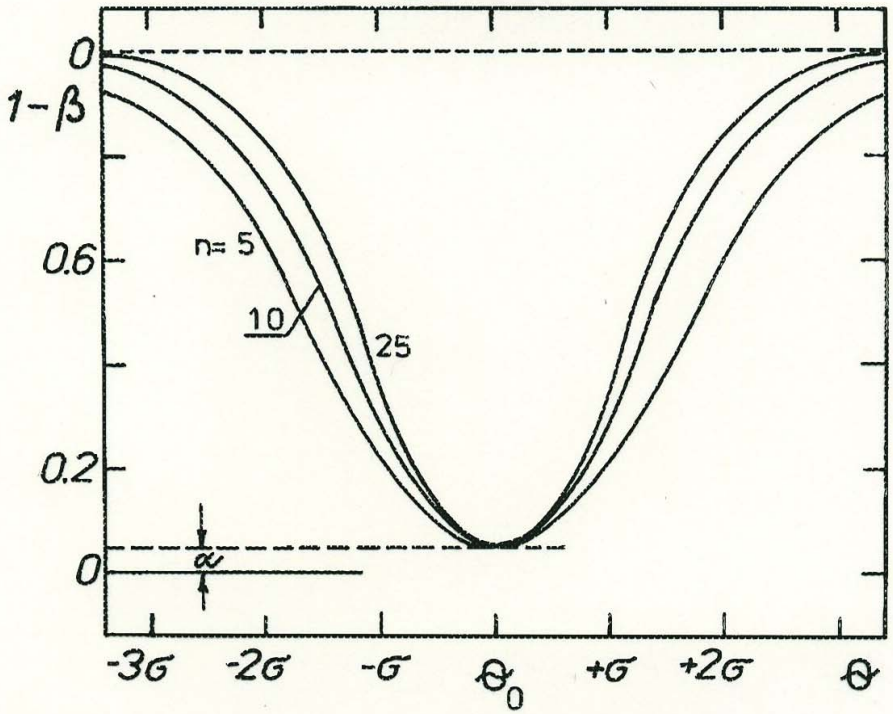
Snahou je minimalizovat obě chyby:

a) Pravděpodobnost, že se vyvarujeme chyby I. druhu, je (1 - α). S pravděpodobností (1 - α) činíme správné rozhodnutí o ověřované hypotéze.

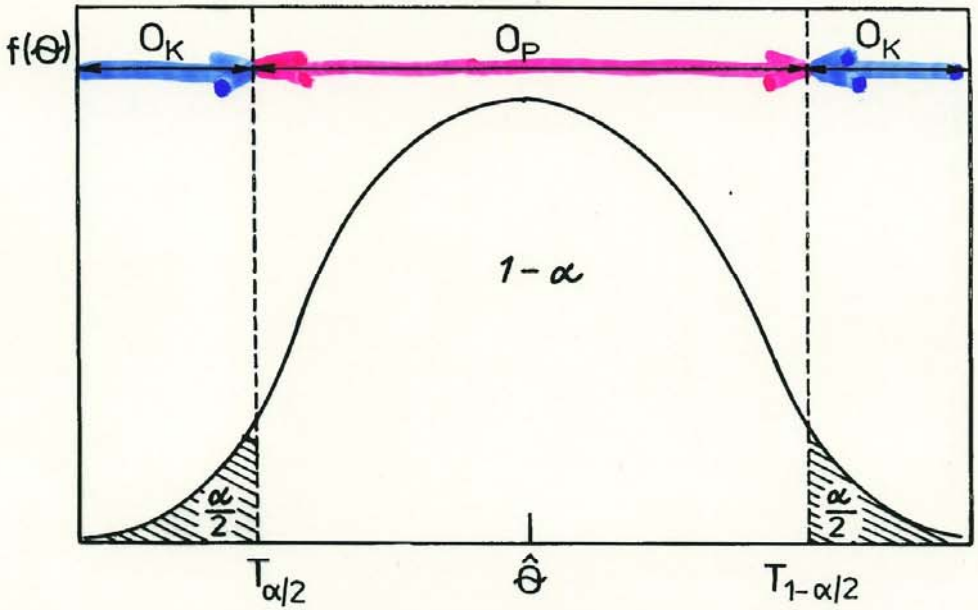
b) Pravděpodobnost (1 - ß), že se vyhneme chybě II. druhu, se nazývá **síla testu** S = 1 - ß a vyjadřuje naději, s jakou test zjistí, že testovaná nulová H_0 neplatí a platí hypotéza alternativní H_A.

Závislost velikosti síly testu S: čím ***větší rozsah*** výběru, tím ***více informací*** o skutečnosti se využívá, a tím s větší pravděpodob-ností zamítneme neplatnou hypotézu ve prospěch alternativní.

Pro n → ∞ platí, že S → 1.



Graf silofunkce pro různé rozsahy výběru (H_0: $\Theta = \Theta_0$, H_A: $\Theta \neq \Theta_0$)



Znázornění kritických oblastí pro oboustranné testy.
T_α představuje 100 α%ní kvantil: O_P přijato, O_K zamítnuto

Volba hladiny významnosti α:

1. Pokud není H_0 zamítnuta na hladině významnosti $\alpha = 0.05$: rozdíl mezi K a $\hat{\Theta}$ je **statisticky nevýznamný**.
2. Pokud je H_0 zamítnuta i na hladině významnosti $\alpha = 0.01$: rozdíl mezi K a $\hat{\Theta}$ je **statisticky významný**.
3. Pokud je H_0 zamítnuta na hladině $\alpha = 0.05$, ale není zamítnuta na hladině $\alpha = 0.01$: **test neposkytl** pro daný rozsah výběru měření **dostatečnou informaci** k rozhodnutí.

DRUHY HYPOTÉZ

Pro každý test musíme formulovat nulovou a alternativní hypotézu:

Testovaná hypotéza se nazývá **nulová hypotéza** (**H_0**).
Předpokládáme, že platí, pokud nemáme k dispozici **dostatečný statistický důkaz** její neplatnosti.

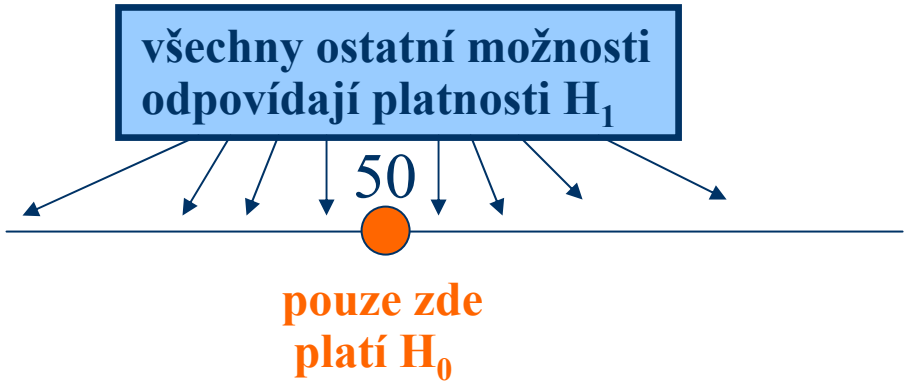
Pokud zamítneme platnost nulové hypotézy, předpokládáme, že platí **alternativní hypotéza** (**H_1**).

DRUHY HYPOTÉZ

Hypotézy se mohou formulovat jako **oboustranné** nebo jako **jednostranné.**

Oboustranná hypotéza:

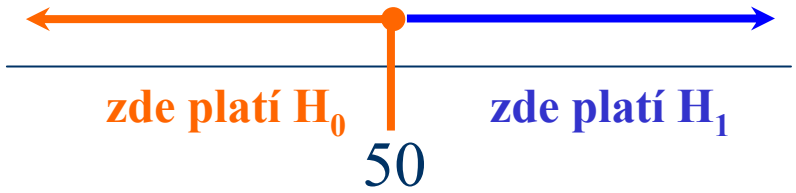
H_0: $\mu = 50$ H_1: $\mu \neq 50$



Jednostranná hypotéza:

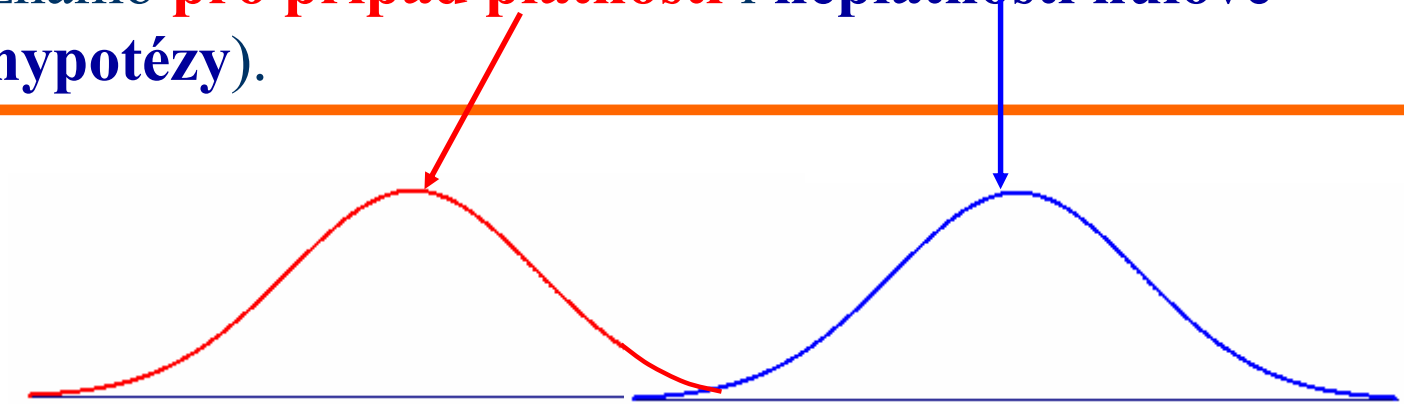
H_0: $\mu \leq 50$ H_1: $\mu > 50$

(H_0: $\mu \geq 50$ H_1: $\mu < 50$)



TESTOVÉ KRITÉRIUM

Testy statistických hypotéz jsou obecně založeny na **testovém kritériu** (náhodná veličina, jejíž rozdělení je známo **pro případ platnosti** i **neplatnosti nulové hypotézy**).



toto je rozdělení testového kritéria pro nulovou hypotézu

toto je rozdělení testového kritéria pro alternativní hypotézu (je to stejná náhodná veličina jako u nulové hypotézy, jen s jinými parametry)

TESTOVÉ KRITÉRIUM

Obor možných hodnot testového kritéria je rozdělen na dvě části – **obor nezamítnutí (přijetí)** a **obor zamítnutí (nepřijetí)** testované hypotézy.

Obor zamítnutí je ta část všech možných hodnot testového kritéria, kde je vysoce nepravděpodobné, že by testové kritérium mohlo nabýt tyto hodnoty (**za předpokladu, že platí nulová hypotéza**).

Hranice oborů tvoří **kritický bod (kritická hodnota),** což je kvantil testového kritéria určený na základě hladiny významnosti α.

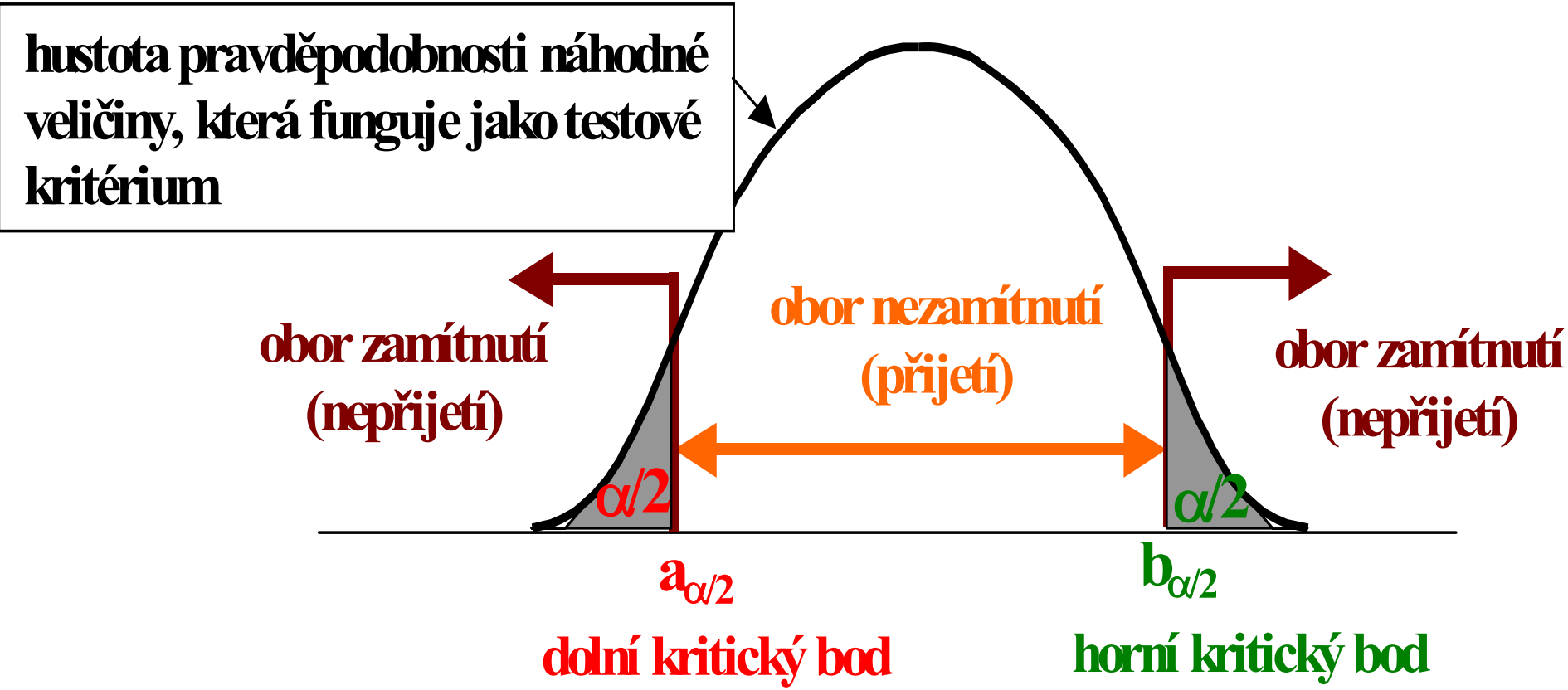
TESTOVÉ KRITÉRIUM

Konkrétní hodnota testového kritéria je výběrová statistika vypočítaná přímo z měřených dat (z výběru).

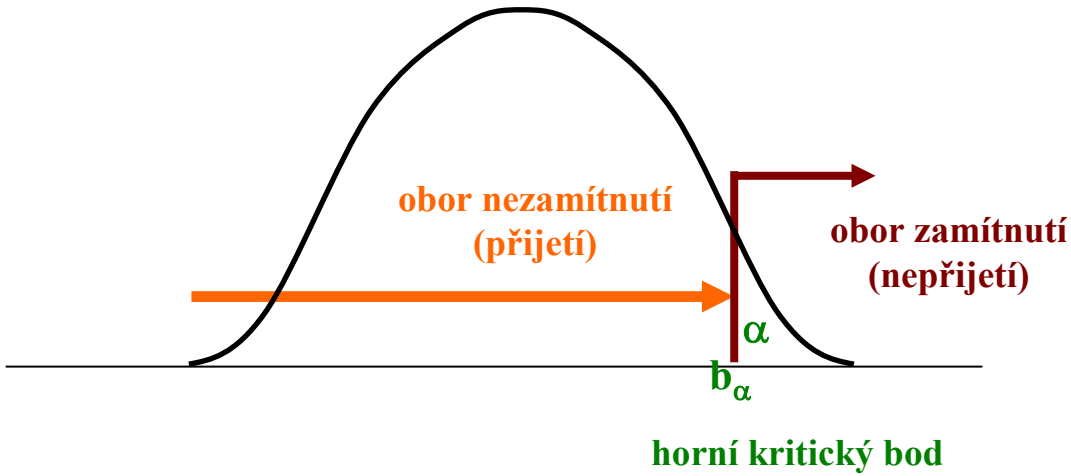
Pokud tato hodnota **padne do oboru nezamítnutí („přijetí“),** je **testovaná (nulová) hypotéza nezamítnuta („přijata“).**

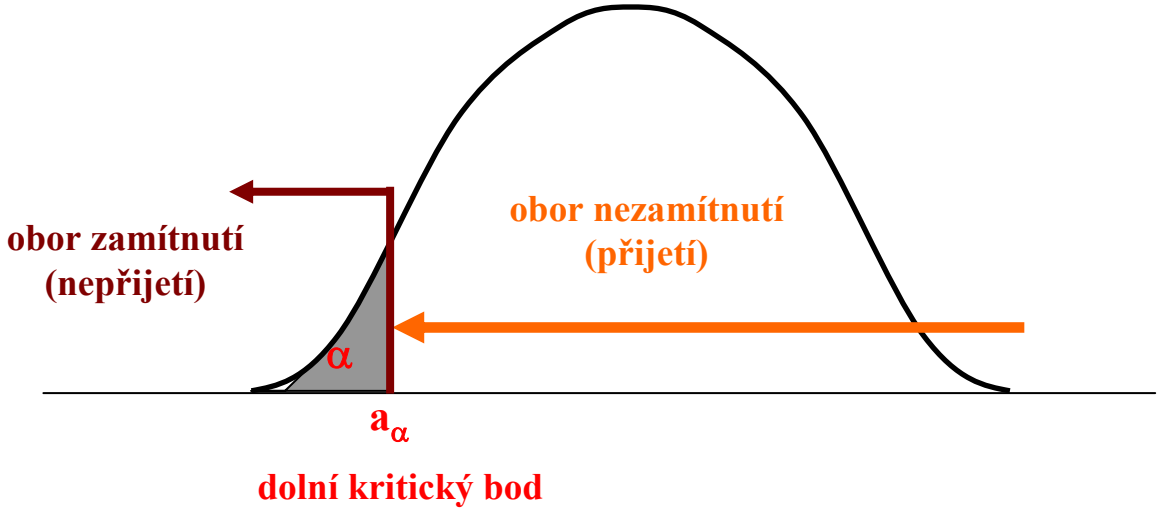
Pokud tato hodnota **padne do oboru zamítnutí (nepřijetí),** je **testovaná (nulová) hypotéza zamítnuta (nepřijata).** V tom případě dále pracujeme s předpokladem, že platí alternativní hypotéza.

TESTOVÉ KRITÉRIUM PRO OBOUSTRANNÝ TEST



TESTOVÉ KRITÉRIUM PRO JEDNOSTRANNÝ TEST





OBECNÝ POSTUP TESTU

- formulace nulové hypotézy (H_0) a alternativní hypotézy (H_1).
- volba hladiny významnosti α
- volba druhu testu a testového kritéria
- určení kritického oboru (oboru nepřijetí) testového kritéria na základě jejího rozdělení pravděpodobnosti a hladiny významnosti
- rozhodnutí o výsledku testu, tj. zda
  - zamítnout nulovou hypotézu (jestliže vypočítaná hodnota testového kritéria padne do oboru nepřijetí),
  - nezamítnout nulovou hypotézu (jestliže vypočítaná hodnota testového kritéria padne do oboru přijetí).

Říkáme, že výsledek testu je významný (signifikantní) na hladině významnosti α, pokud jeho rozhodnutí vede k zamítnutí nulové hypotézy na základě výpočtu s využitím zvolené hodnoty α.

POSTUP TESTOVÁNÍ NA PŘÍKLADU

Úloha: Byla prověřována správnost měření výškoměru. Byla 15 x změřena výška, jejíž hodnota je přesně známa (μ_0 = 20 m). Z výsledků měření se získal průměr měřených výšek = 19,2 m se směrodatnou odchylkou S = 1,1 m. Stanovte, zda-li výškoměr měří správně.

❶ formulace H_0 a H_1:

H_0: Výškoměr měří správně.

H_0: $\mu = \mu_0$ (***výběrový soubor o parametrech a S^2 pochází ze základního souboru s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, přičemž parametr μ se rovná normované hodnotě μ_0).***

POSTUP TESTOVÁNÍ NA PŘÍKLADU

H_1: *Výškoměr **ne**měří správně.*

H_1: $\mu \neq \mu_0$ ***(výběrový soubor o parametrech a S^2 pochází ze základního souboru s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, přičemž parametr μ se **ne**rovná normované hodnotě μ_0).***

❷ stanovení hladiny významnosti α:

Hladinu významnosti stanovíme na 0.05, tj. pro zamítnutí nulové hypotézy potřebujeme pravděpodobnost nejméně $1 - \alpha = 0.95$.

POSTUP TESTOVÁNÍ NA PŘÍKLADU

❸ výběr typu testu (testového kritéria)

vzhledem k charakteru úlohy dané formulací hypotéz vybereme test střední hodnoty pro jeden výběr, který testuje námi zvolené hypotézy.

Testové kritérium je

$$t = (\bar{x} - \mu_0) \cdot \frac{\sqrt{n-1}}{S} \qquad t = (19,2 - 20) \cdot \frac{\sqrt{15-1}}{1,1} = -2,72$$

Pro tento test jako testové kritérium **používáme t-rozdělení** a jeho **konkrétní vypočítaná hodnota** pro naše zadání je **– 2,72**. Tuto hodnotu budeme porovnávat k kritickými mezemi.

POSTUP TESTOVÁNÍ NA PŘÍKLADU

❹ stanovení kritické hodnoty

Vzhledem k tomu, že pracujeme (podle formulace hypotéz a typu úlohy) s oboustranným testem, musíme zvolit 2 kritické hodnoty, tj. dolní a horní. Studentovo t-rozdělení je symetrické kolem 0, stačí nám tedy určit jednu hodnotu a použít ji s kladným i záporným znaménkem.

Využijeme funkce Excelu **=TINV (0,05;14),** kde 0,05 je hodnota α (a funkce automaticky vrátí hodnoty pro oboustranný interval, tj. vlastně pro α = 0,025). Hodnota 14 je počet stupňů volnosti (n-1)=15-1. **Výsledná hodnota je 2,145**. Tím jsou určeny **kritické meze –2,145 a +2,145.**

POSTUP TESTOVÁNÍ NA PŘÍKLADU

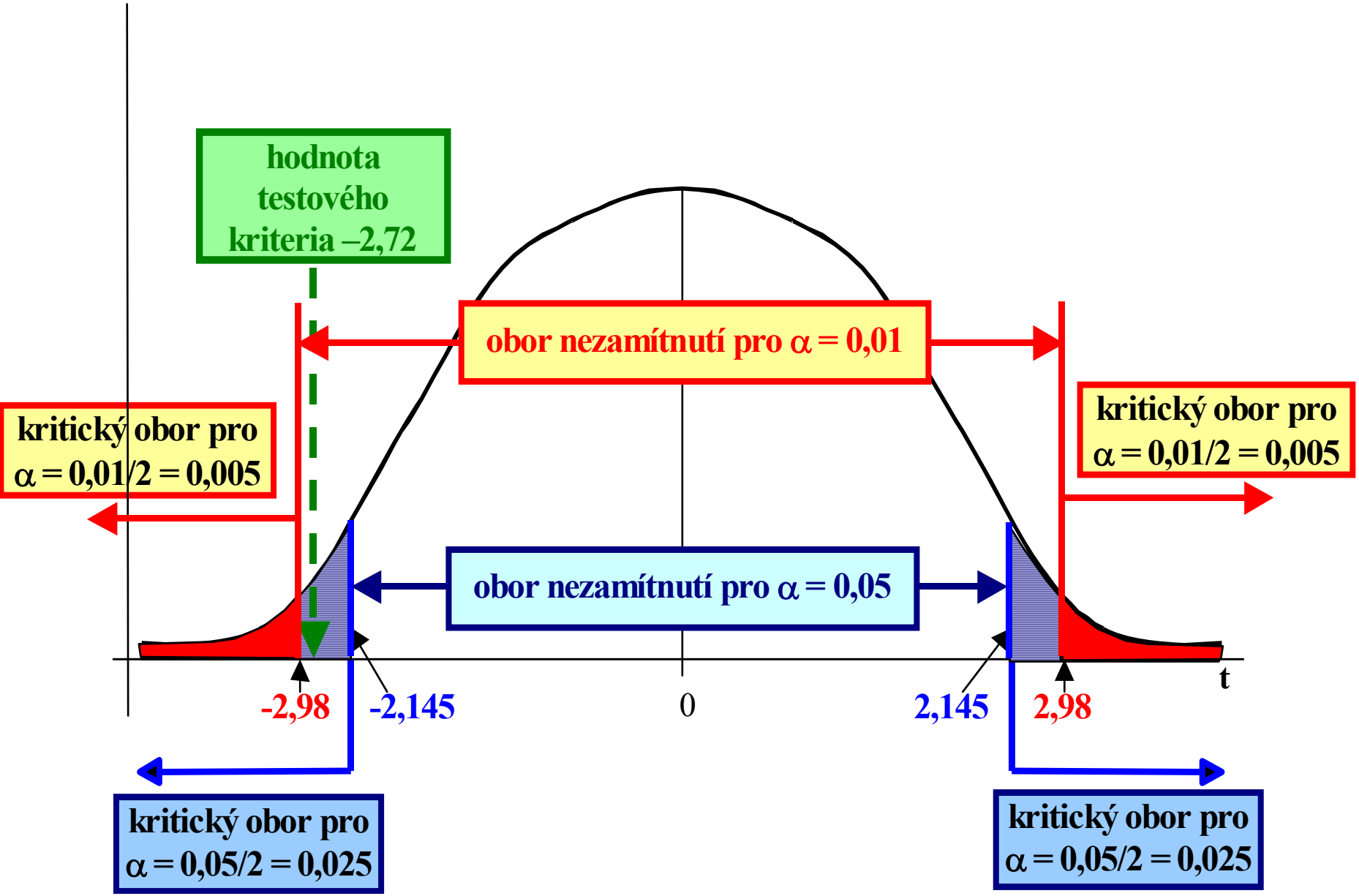
❺ rozhodnutí o výsledku testu

Kritická hodnota –2,145 je menší než vypočítaná hodnota testového kritéria –2,72, znamená to, že –2,72 padlo do oboru nepřijetí – tedy nulovou hypotézu zamítáme.

Závěr testu:

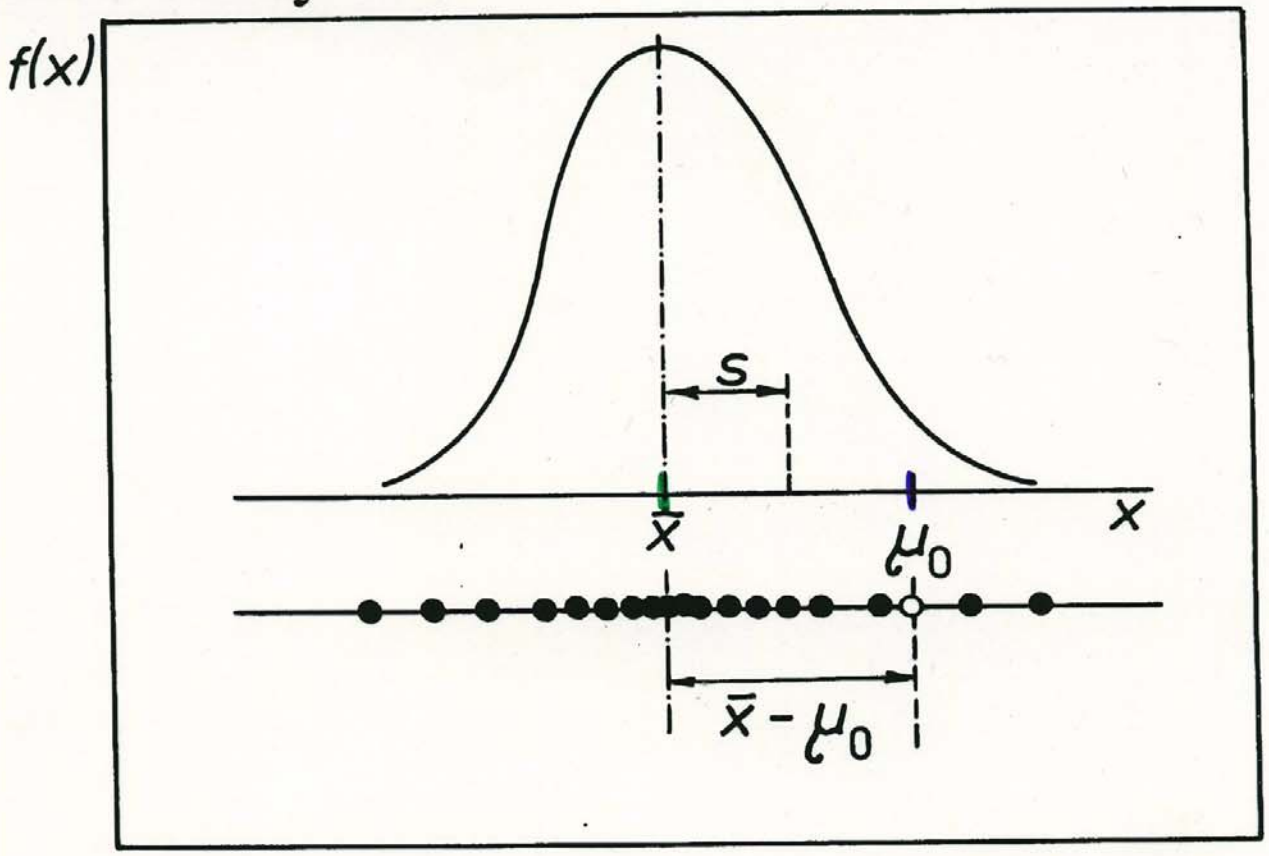
Výškoměr neměří správně. Odchylka naměřených hodnot od správné hodnoty je statisticky významná.

POSTUP TESTOVÁNÍ NA PŘÍKLADU



Testy o parametrech jednoho souboru

Testy hypotéz o parametrech μ a σ^2 normálního rozdělení: soubor s $N(\mu, \sigma^2)$, výběr rozsahu n a vypočteme průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku s.



Zadání testu správnosti výsledku

Formulace hypotéz: H_0: $\mu = \mu_0$ *vs.* H_A: $\mu \neq \mu_0$

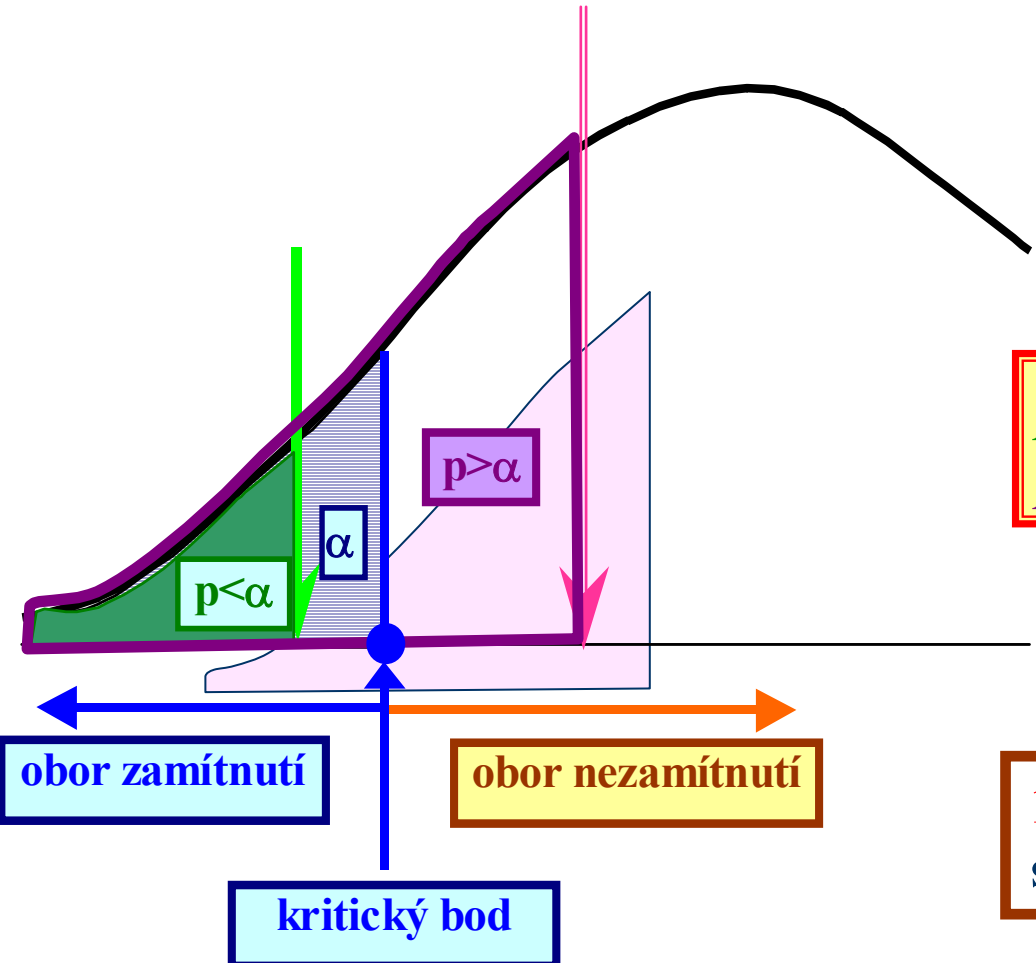
Testová statistika: $$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$$

Testování střední hodnoty μ a rozptylu σ^2: výběr normálního rozdělení, kde $t_\alpha(n-1)$ je kvantil Studentova a $\chi^2_\alpha(n-1)$ je kvantil χ^2-rozdělení,

Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testační charakteristika	Kritický obor
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$t = (x - \mu_0)\sqrt{n}/s$	$t \geq t_{(1-\alpha)}(n-1)$ $t < t_\alpha(n-1)$ $\lvert t \rvert \geq t_{(1-\alpha/2)}(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma^2_0$	$\sigma^2 > \sigma^2_0$ $\sigma^2 < \sigma^2_0$ $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$	$\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma^2_0$	$\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2 < \chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leq \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

p-SPOČTENÁ HODNOTA HLADINY VÝZNAMNOSTI

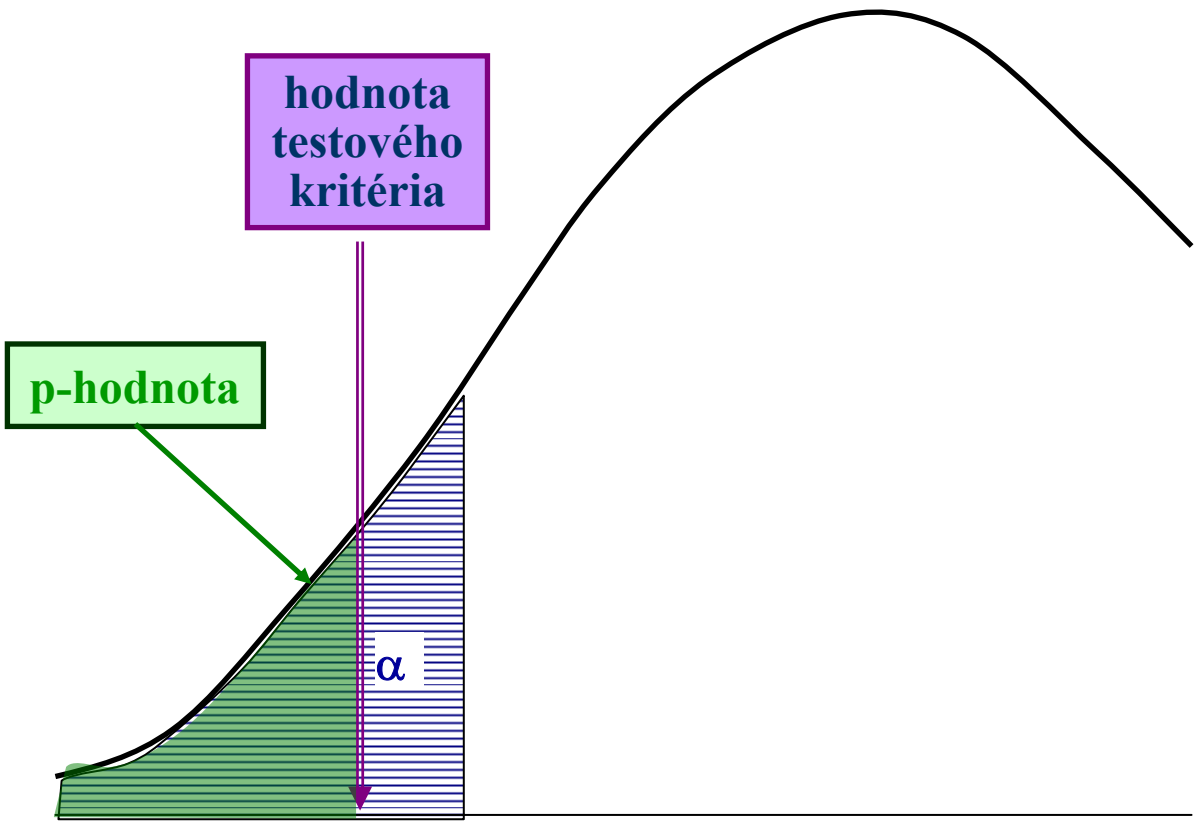
***p*-hodnota je pravděpodobnost, že získáme stejné nebo extrémnější testové kritérium než je vypočítané, za předpokladu, že ve skutečnosti platí nulová hypotéza.**



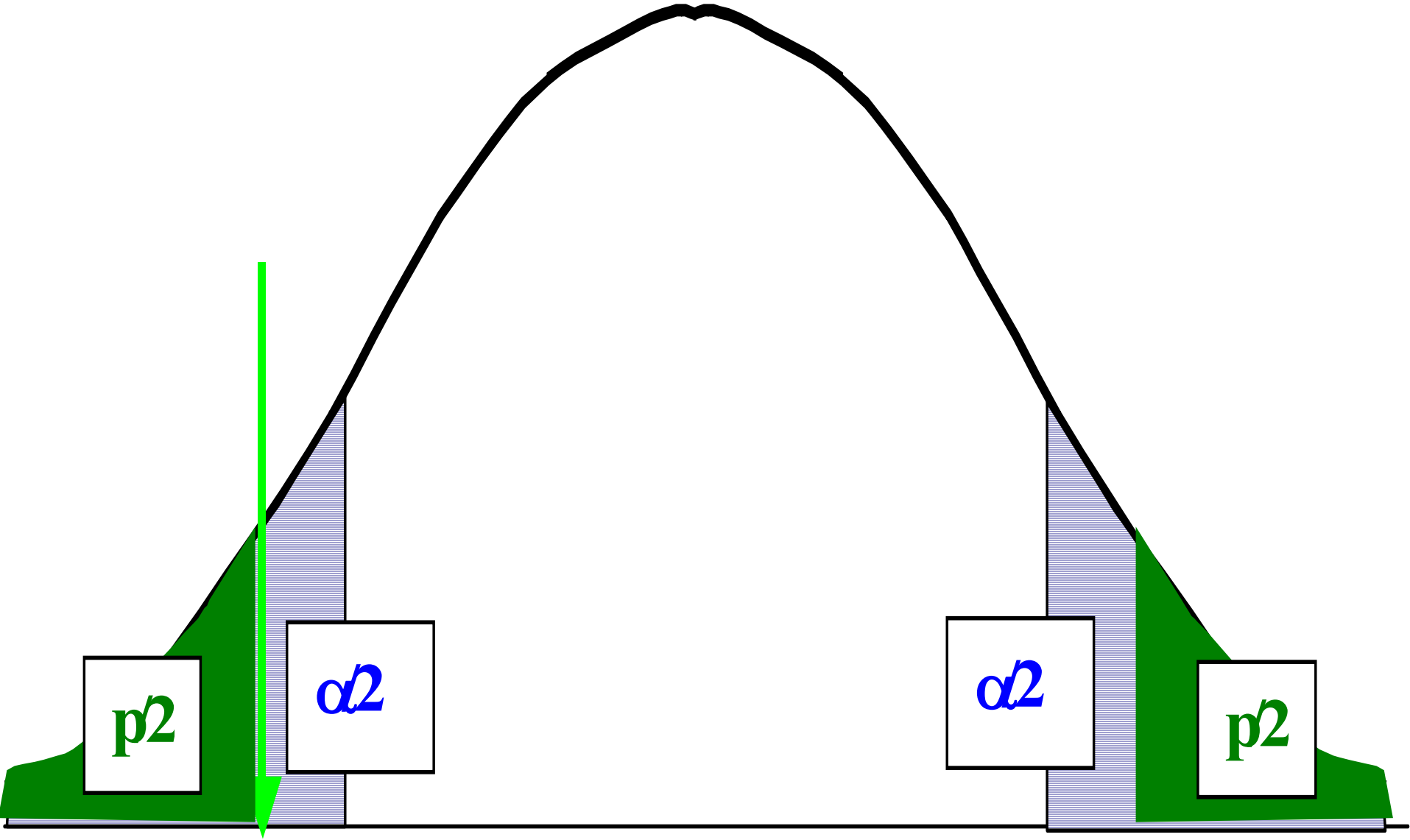
$p < \alpha \Rightarrow$ H_0 **zamítáme**
$p > \alpha \Rightarrow$ H_0 **nezamítáme**

1-*p* – maximální pravděpodobnost, se kterou můžeme zamítnout H_0

p – HODNOTA (jednostranný test)



p-HODNOTA (oboustranný test)



p-HODNOTA

p-hodnota závisí na:

- rozdílu mezi skutečnou a testovanou hypotézou (hodnotou, …)
- velikosti výběru

Skutečná hodnota (k)	Testovaná konstanta (k_0)	n	t	t_{krit}	p
99	100	10	0.300	2.262	0.771
99	100	100	0.995	1.984	0.322
99	100	1000	3.161	1.962	0.002
99	100	20	0.436	2.093	0.668
97	100	20	1.308	2.093	0.207
95	100	20	2.179	2.093	0.042
90	100	20	4.359	2.093	0.000

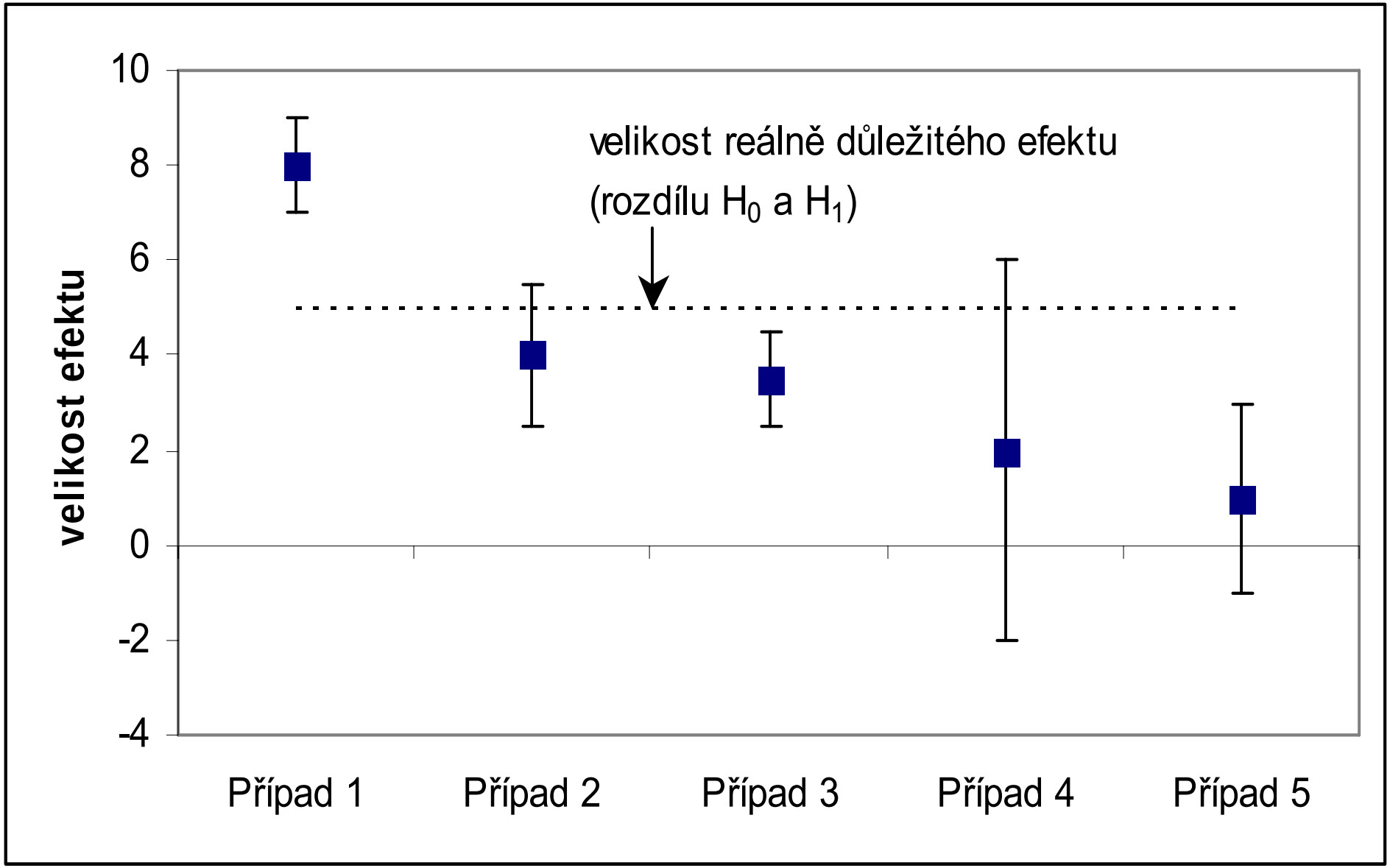
p-HODNOTA

Je nutné rozlišovat mezi **statistickou významností** (danou p - hodnotou) a **reálnou (ekologickou, ekonomickou, sociální,…) významností** !!

Praktická (reálná) důležitost pozorovaného rozdílu H_0 - H_1	Statistická významnost (podle p)	
	nevýznamná	významná
nedůležitý	n v pořádku	n příliš velké
důležitý	n příliš malé	n v pořádku

apriorní (před pokusem dělaná) analýza síly testu!!

p-HODNOTA (statistická x reálná významnost)



CHYBA I. A II. DRUHU

Chyba I. druhu (α) – pravděpodobnost, že test **zamítne hypotézu, která ve skutečnosti platí**.

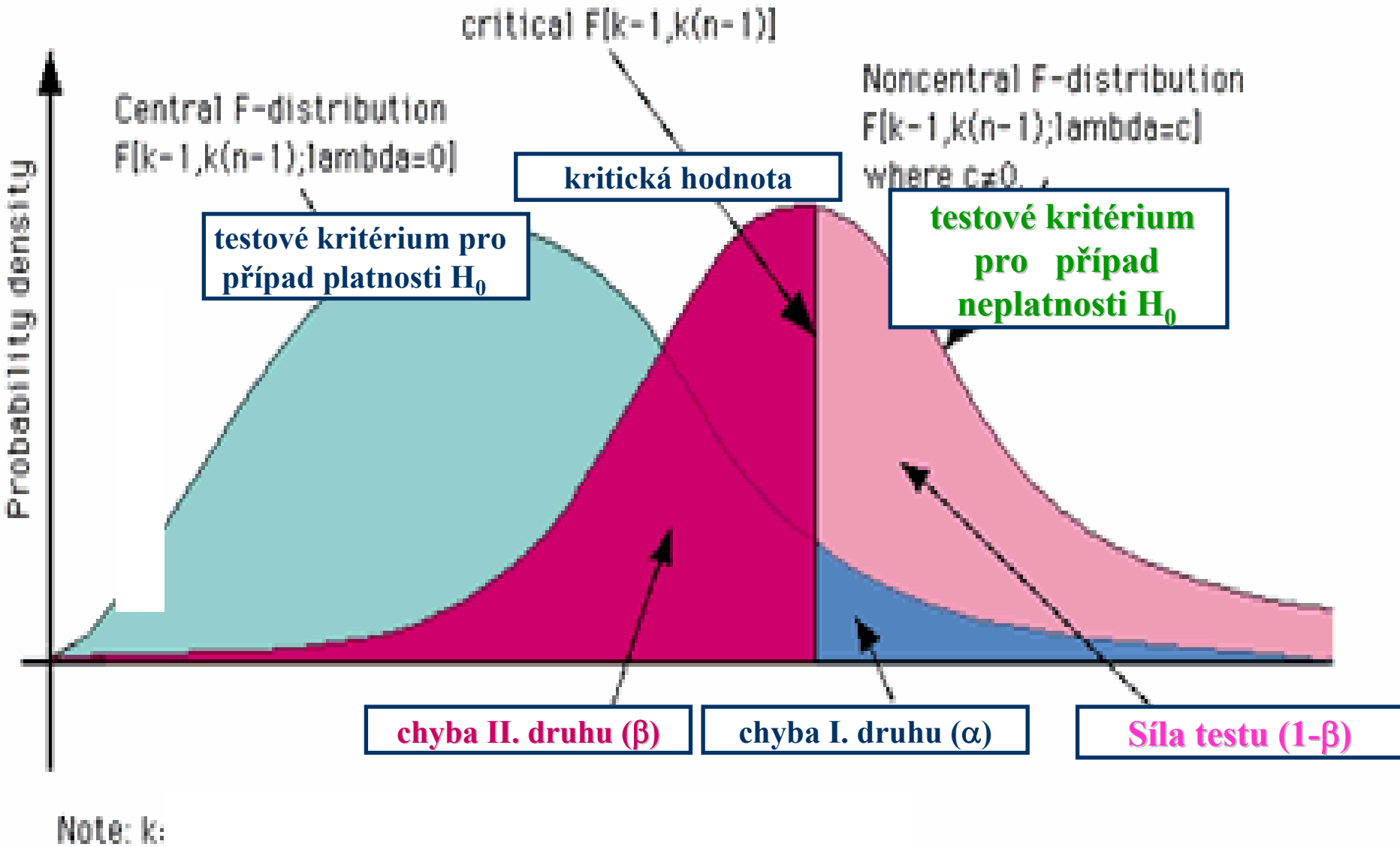
Chyba II. druhu (β) – pravděpodobnost, že test **NEzamítne hypotézu, která ve skutečnosti NEplatí**.

Síla testu (1- β) – pravděpodobnost, že test správně odmítne hypotézu, která ve skutečnosti neplatí.

CHYBA I. A II. DRUHU

		H_0 VE SKUTEČNOSTI	
		platí	neplatí
H_0 PODLE ROZDHODNUTÍ TESTU	platí	činíme správné rozhodnutí P = 1 - alfa	dopouštíme se chyby II. druhu beta
	neplatí	dopouštíme se chyby I. druhu alfa	činíme správné rozhodnutí S = 1 - beta

CHYBA I. A II. DRUHU



CHYBA II. DRUHU

Chybu II. druhu (β) **nelze určit apriorně před testem** jako chybu I. druhu (α). Je nutno ji vypočítat a **slouží především k výpočtu síly testu (S = 1 - β)**.

Vycházíme z podmíněné pravděpodobnosti

$$\beta = P(t < C | H_0 \text{ neplatí})$$

kde **t je hodnota testového kritéria**

C je kritický bod

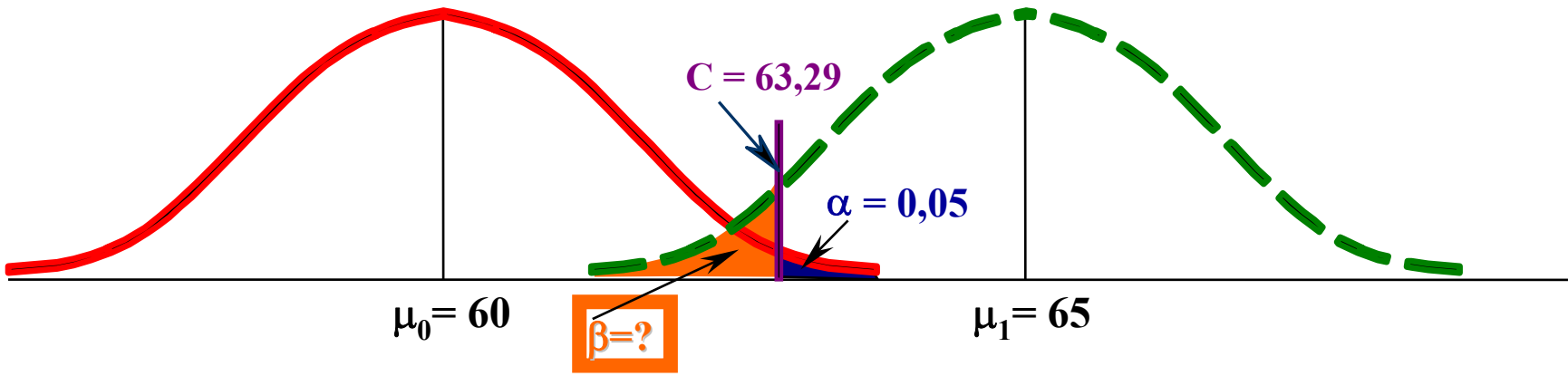
CHYBA II. DRUHU - VÝPOČET

❶ formulace H_0 a H_1:

H_0: $\mu = 60$ H_1: $\mu = 65$; $n = 100$, $\sigma = 20$

❷ stanovení kritického bodu C:

$$C = \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 60 + 1{,}645 \cdot \frac{20}{10} = 63{,}29$$

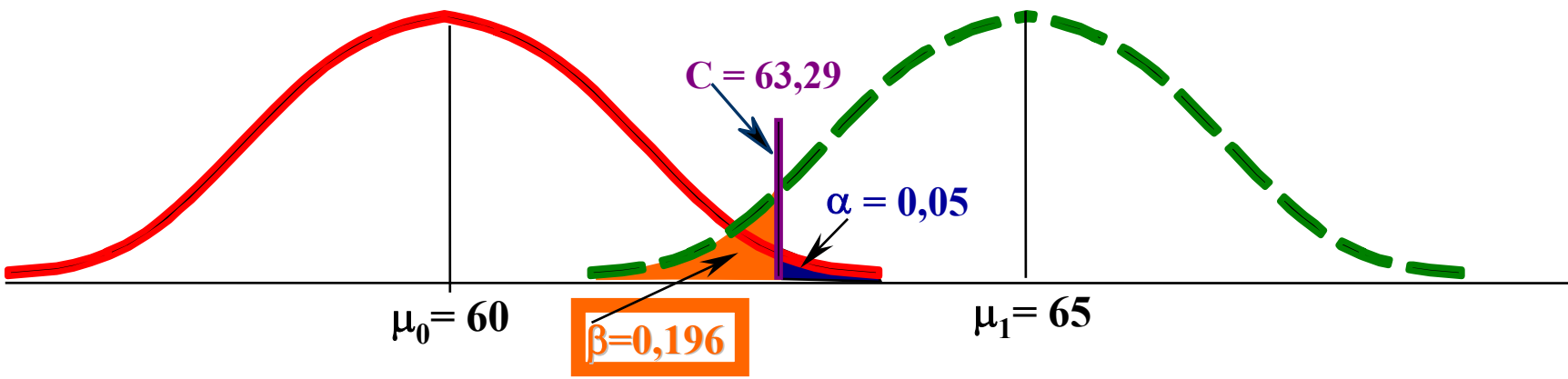


CHYBA II. DRUHU - VÝPOČET

❸ Výpočet pravděpodobnosti odpovídající hodnotě β

$$\beta = P(\bar{x} < C \mid \mu = \mu_1)$$

$$P\left(\frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{C - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{63,29 - 65}{20/10}\right) = P(Z < -0,855) = 0,1963$$

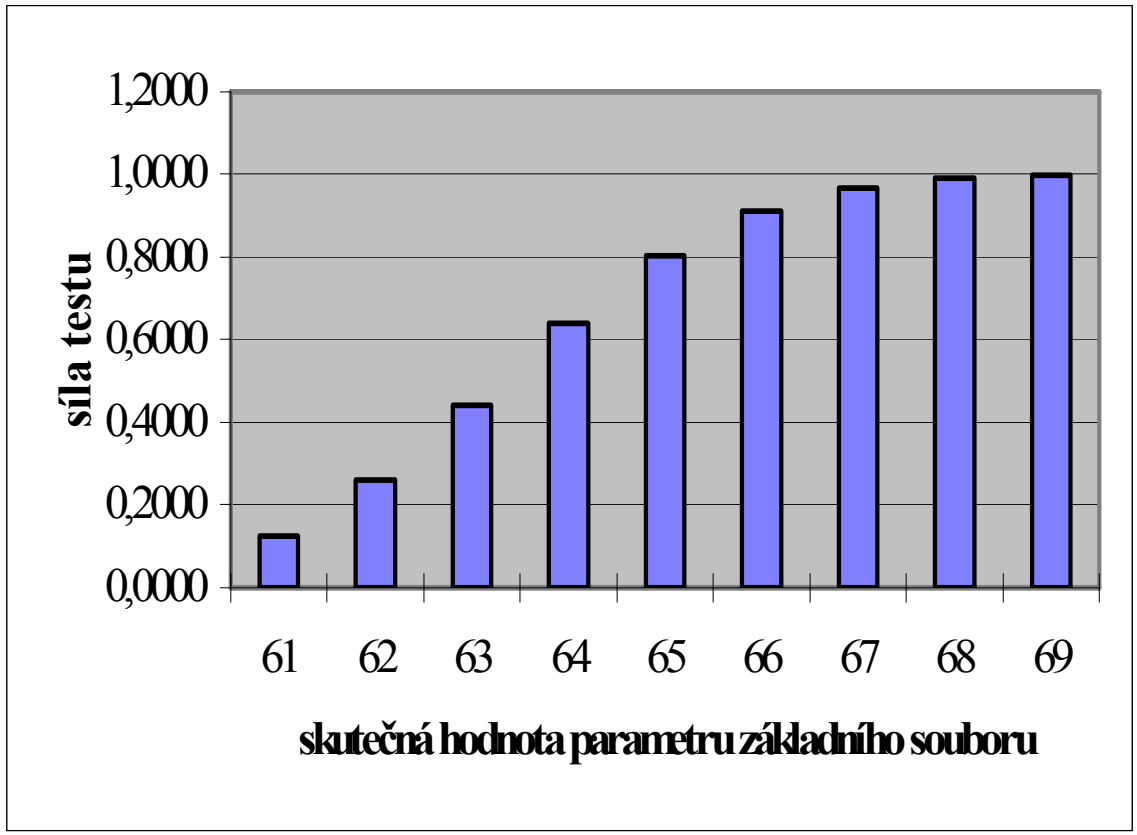


CHYBA II. DRUHU - VÝPOČET

formulace H_0 a H_1 pro jednostranný test:

H_0: $\mu = 60$ H_1: $\mu > 60$

Hodnota parametru	Chyba II. druhu	Síla testu
61	0,8739	0,1261
62	0,7405	0,2595
63	0,5577	0,4423
64	0,3613	0,6387
65	0,1963	0,8037
66	0,0877	0,9123
67	0,0318	0,9682
68	0,0092	0,9908
69	0,0021	0,9979



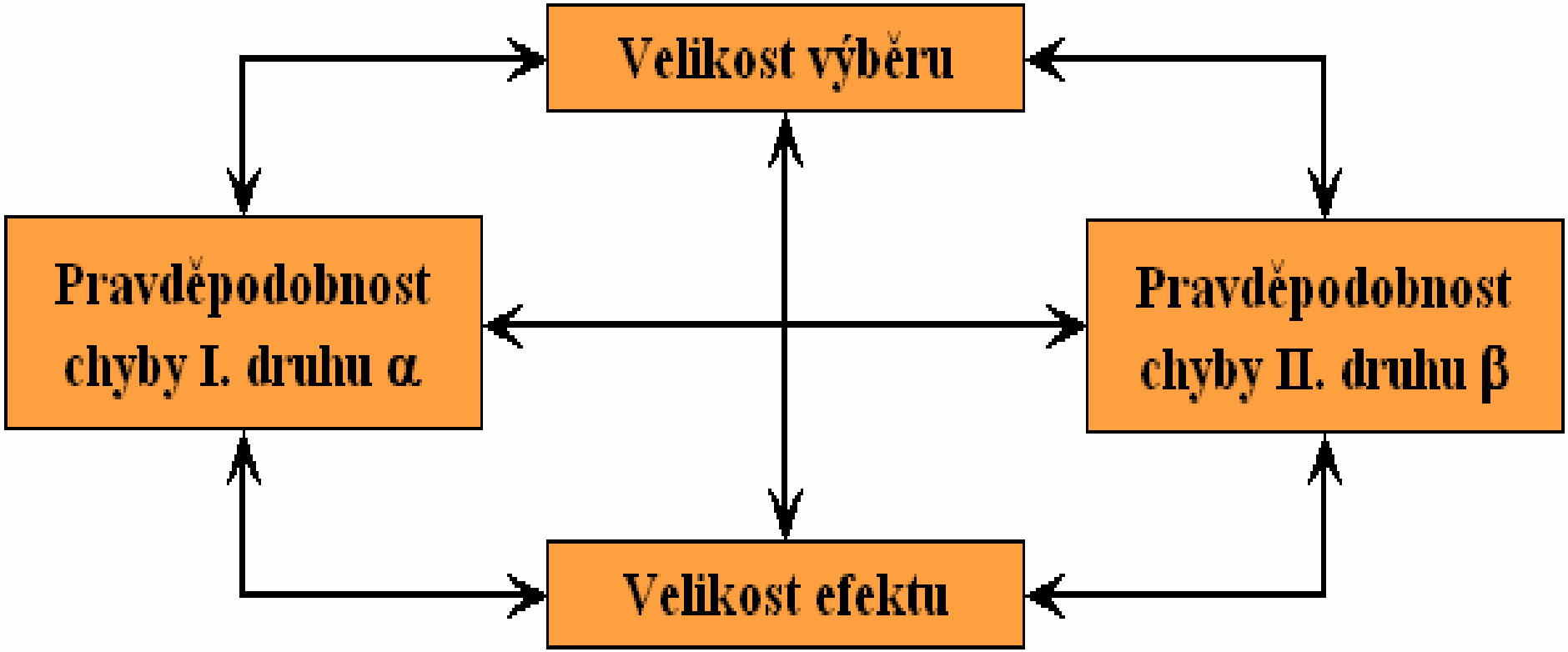
FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ SÍLU TESTU

Síla testu závisí na následujících faktorech:

- **odchylka mezi hodnotou testovaného parametru v nulové hypotéze a skutečnou hodnotou parametru – velikost efektu**
- **variabilita (směrodatné odchylce nebo rozptylu) základního souboru**
- **velikost výběrového souboru**
- **na hladina významnosti α**
- **typ testu**

FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ SÍLU TESTU

$$S \propto \frac{ES \cdot \alpha \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$$



ÚČEL ANALÝZY SÍLY TESTU

před provedením pokusu (apriorní analýza)	
zjišťujeme	**známe (zadáváme)**
potřebnou velikost výběru	**- chybu I. druhu (alfa)** **- požadovanou sílu testu (1 - beta)** **- velikost efektu, kterou potřebujeme detekovat**

ÚČEL ANALÝZY SÍLY TESTU

po provedení pokusu (aposteriorní analýza)	
zjišťujeme	známe (zadáváme)
skutečnou sílu testu	- chybu I. druhu (alfa) - velikost výběru (N) - velikost efektu

Metodické problémy testování

- je nutné vždy apriorně určovat chybu I. druhu?
- jaký je rozdíl mezi statistickou a „reálnou“ významností testu?
- za předpokladu, že kontroluji chybu I. druhu, nakolik je průkazné nezamítnutí nulové hypotézy?
- jakou velikost výběru potřebuji, abych prokázal efekt určité velikosti (tj. určitý rozdíl mezi nulovou a alternativní hypotézou)?

Musíme vždy vycházet z chyby I. druhu?

Předem („napevno“) se určuje vždy ta chyba, jejíž důsledky považujeme za vážnější (důležitější):

- **určíme chybu I. druhu, dopočítáme chybu II. druhu**
- **určíme chybu II. druhu, dopočítáme chybu I. druhu**
- **kompromisní - určíme vzájemný poměr závažnosti důsledků obou chyb a počítáme obě**

TYPY TESTŮ

STATISTICKÉ TESTY

PARAMETRICKÉ

mají vyšší sílu

vyžadují splnění určitých podmínek

PRO JEDEN VÝBĚR

H0: P = K

PRO DVA VÝBĚRY

H0: P1 = P2

PRO VÍCE VÝBĚRŮ

H0: P1 = P2 =...=Pk

NEPARAMETRICKÉ

nižší síla testu

vyžadují pouze spojité rozdělení

vhodné při velmi malých výběrech

PRO JEDEN VÝBĚR

PRO DVA VÝBĚRY

PRO VÍCE VÝBĚRŮ

Testování hypotéz I

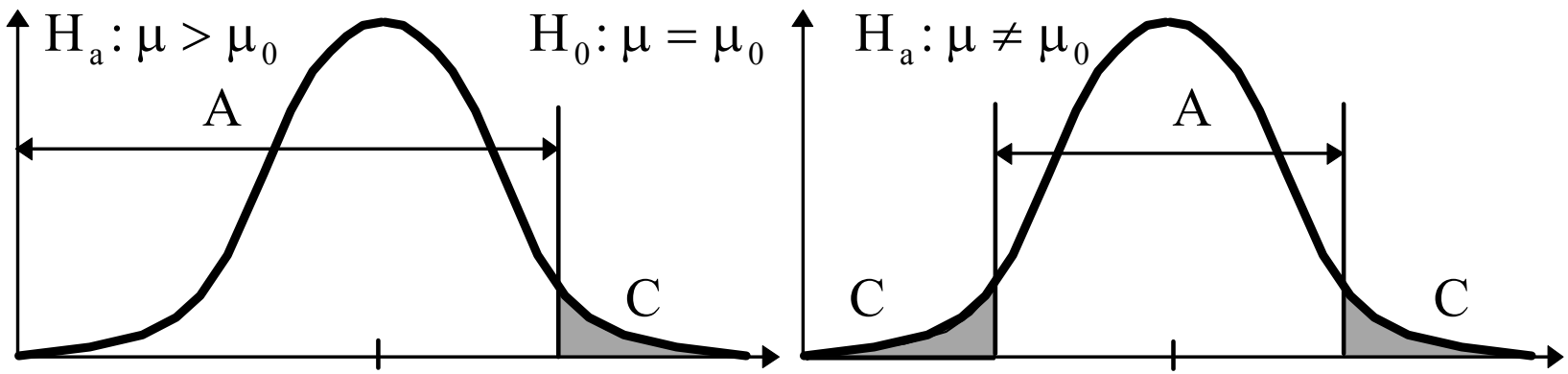
Hypotéza: **předpoklad o rozdělení a jeho parametrech (H)**

Testování: **rozhodnutí o H na základě informací z výběru**

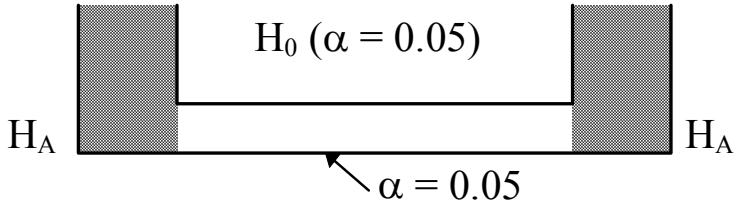
H_0: základní (bázová) hypotéza

H_A: alternativní (přijatá, když nelze přijmout H_0)

Testovací statistika: $T(x_1,...x_n) \rightarrow f(T)$

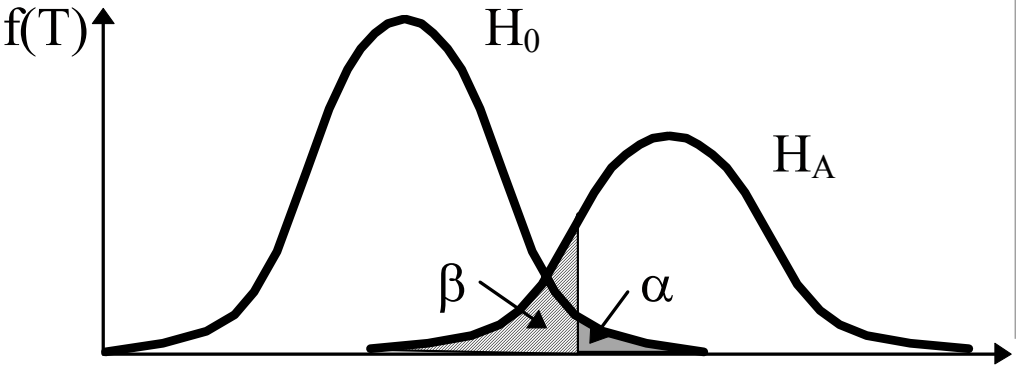


Souvislosti testů s IS:



Testování hypotéz II

- ***Chyba prvního druhu [α]*: H_0 platí, ale nebyla testem přijata**
- ***Chyba druhého druhu [β]*: H_0 neplatí, ale byla testem přijata**



	A	R
T	$1-\alpha$	α
F	β	$1-\beta$

Test o střední hodnotě

σ^2 : neznámé

Nulová hypotéza: $H_0 : \mu = \mu_0$

Testová statistika: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

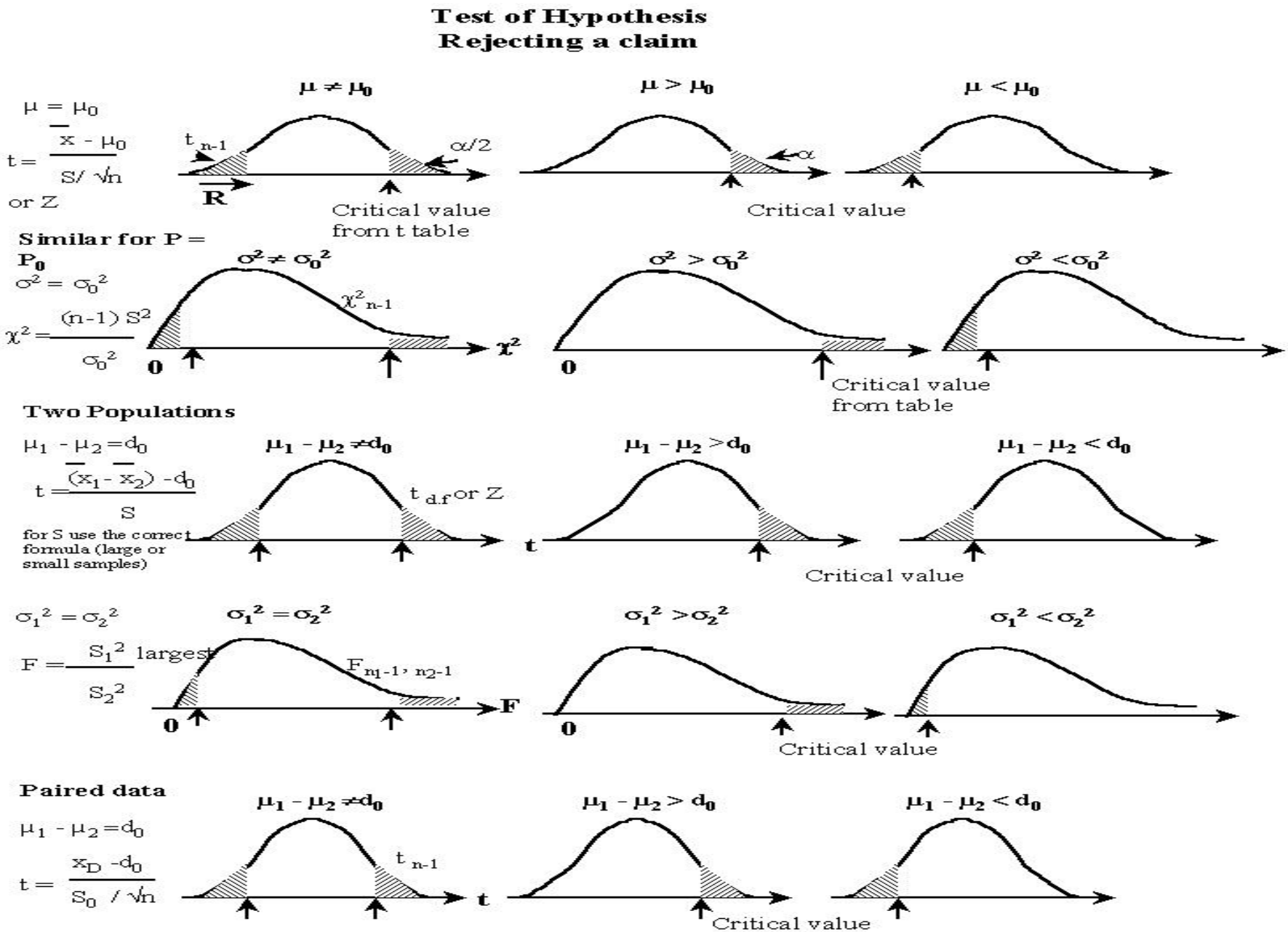
- **Alternativní Hypotéza** **Oblast zamítnutí**

$H_a : \mu > \mu_0$ $\quad t \geq t_{\alpha,n-1}$

$H_a : \mu < \mu_0$ $\quad t \leq -t_{\alpha,n-1}$

$H_a : \mu \neq \mu_0$ $\quad$ buď $t \geq t_{\alpha/2,n-1}$ nebo $t \leq -t_{\alpha/2,n-1}$

Testy – normální data



C. Testování statistických hypotéz

100(1 - α)%ní interval spolehlivosti: padne-li zadaná hodnota Θ_0 parametru Θ do tohoto intervalu, nezamítá se hypotéza H_0: $\Theta = \Theta_0$. Padne-li Θ_0 mimo tento interval, zamítá se H_0.

Postup při testu shodnosti dvou základních souborů:

1. Ověření normálního rozdělení obou souborů: testy a statistické diagnostiky k ověření předpokladů o výběru,

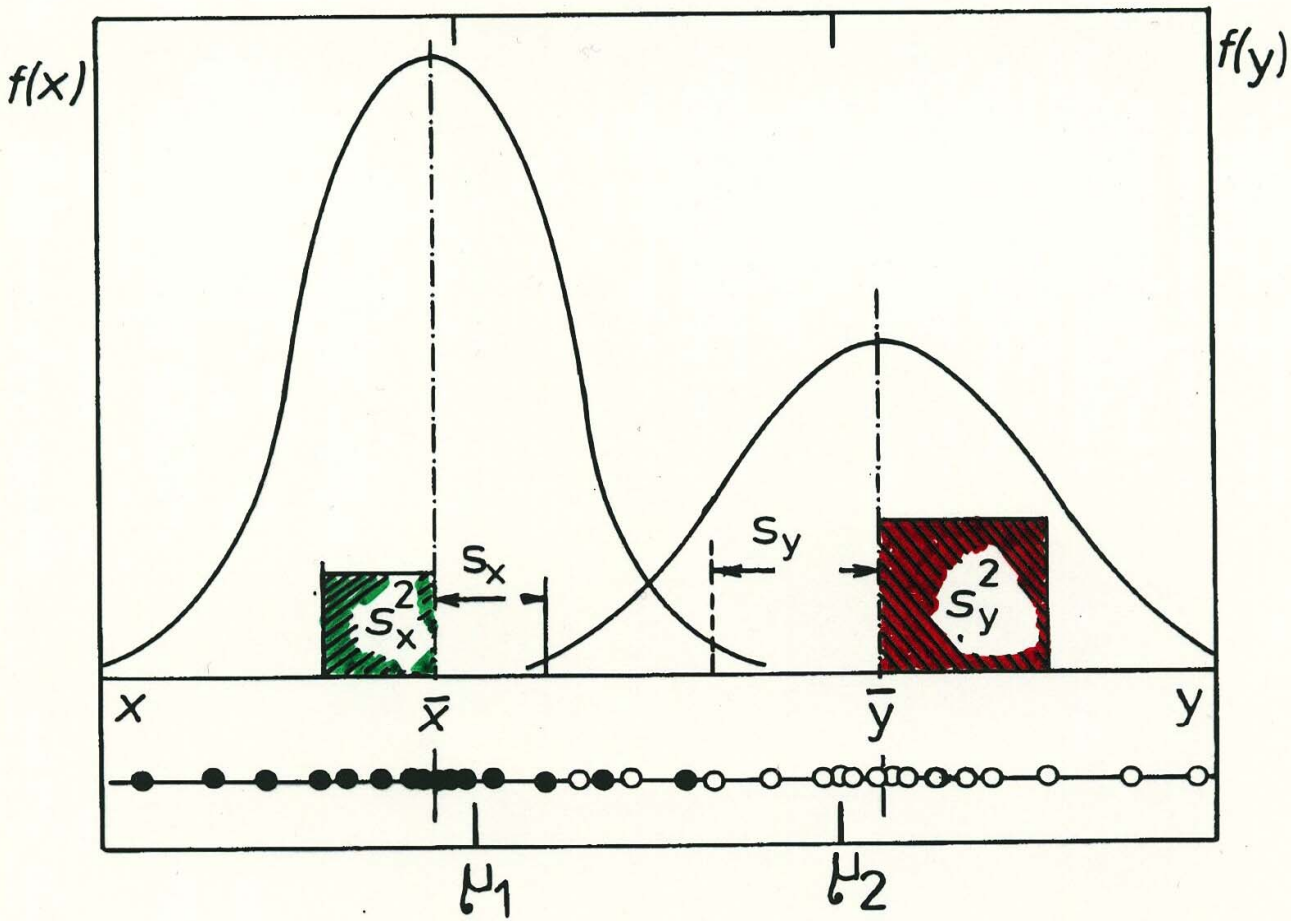
2. Shoda rozptylů:

2.1 Fisher-Snedecorovým F-testem,
2.2 Modifikovaným Fisher-Snedecorovým F-testem,
2.3 Jackknife test F_J

3. Shoda středních hodnot dvou souborů

3.1 Klasický Studentův t-test T_1 pro homoskedasticitu,
3.2 Klasický Studentův t-test T_2 pro heteroskedasticitu,
3.3 Modifikovaný Studentův t-test T_3 pro výběry, odchýlené od normálního rozdělení a lišící se v šikmostech,
3.4 Robustní Jackknife test polohy T_4 pro homoskedasticitu,
3.5 Robustní Jackknife test polohy T_5 pro heteroskedasticitu,

Testy shody rozptylů



Test shodnosti výsledků při nestejných rozptylech

1. Klasický Fisher-Snedecorův F-test:

Formulace hypotéz: H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ ***vs.*** H_A: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Předpoklad: oba výběry jsou nezávislé a pocházejí z normálního rozdělení.

Testovací kritérium: má tvar

$$F = \max\left(\frac{s_x^2}{s_y^2}, \frac{s_y^2}{s_x^2}\right)$$

Testování: $F > F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$, je H_0 o shodě rozptylů na hladině významnosti α zamítnuta.

(V opačném případě se pořadí stupňů volnosti zamění.)

2. Modifikovaný Fisher-Snedecorův F-test:

Formulace hypotéz: H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ ***vs.*** H_A: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Předpoklad: obě rozdělení mají jinou špičatost než odpovídá normálnímu,

Testovací kritérium: má tvar

$$F = \max\left(\frac{s_x^2}{s_y^2}, \frac{s_y^2}{s_x^2}\right)$$

Kvantil $F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$: se stupni volnosti ν_1 a ν_2 dle

$$\nu_1 = \frac{n_1 - 1}{1 + \frac{\hat{g}_{2c}}{2}}$$

$$\nu_2 = \frac{n_2 - 1}{1 + \frac{\hat{g}_{2c}}{2}}$$

kde $$\hat{g}_{2c} = \frac{2(n_1 + n_2)\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^4 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^4\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^2\right]^2} - 3$$

Testování: $F > F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$, je H_0 o shodě rozptylů na hladině významnosti α zamítnuta.

(V opačném případě se pořadí stupňů volnosti zamění.)

3. Jackknife test:

Formulace hypotéz: H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ ***vs.*** H_A: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Předpoklad: ve výběru existují vybočující hodnoty nebo rozdělení není Gaussovské

Testovací kritérium má tvar

$$F_J = \frac{n_1(\bar{z}_1 - \bar{z})^2 + n_2(\bar{z}_2 - \bar{z})^2}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(z_{1i} - \bar{z}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(z_{2i} - \bar{z}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

kde $\bar{z} = \dfrac{n_1\bar{z}_1 + n_2\bar{z}_2}{n_1 + n_2}$, $z_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_j} z_{ji}}{n_j}$, $j = 1, 2$

a veličiny z_{1i} podle vztahu

$$z_{1i} = n_1 \ln s_x^2 - (n_1 - 1)\ln s_{1(i)}^2$$

kde $$s_{1(i)}^2 = \frac{1}{n_1 - 2}\sum_{j \neq i}^{n_1}(x_j - \bar{x}_{(i)})^2$$

Zde se vyskytuje průměr s vynechanou i-tou hodnotou

$$\bar{x}_{(i)} = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{j \neq i}^{n_1} x_j$$

Při výpočtu z_{2i} se ve výše uvedených vztazích dosazují hodnoty $\{y_j\}$, $j = 1, \ldots, n_2$, rozptyl s_y^2 a rozsah výběru n_2.

Testování: $F_J > F_{1-\alpha/2}(2, n_1 + n_2 - 2)$, je nutné zamítnout hypotézu H_0 o shodnosti obou výběrových rozptylů na hladině významnosti.

Testy shody středních hodnot

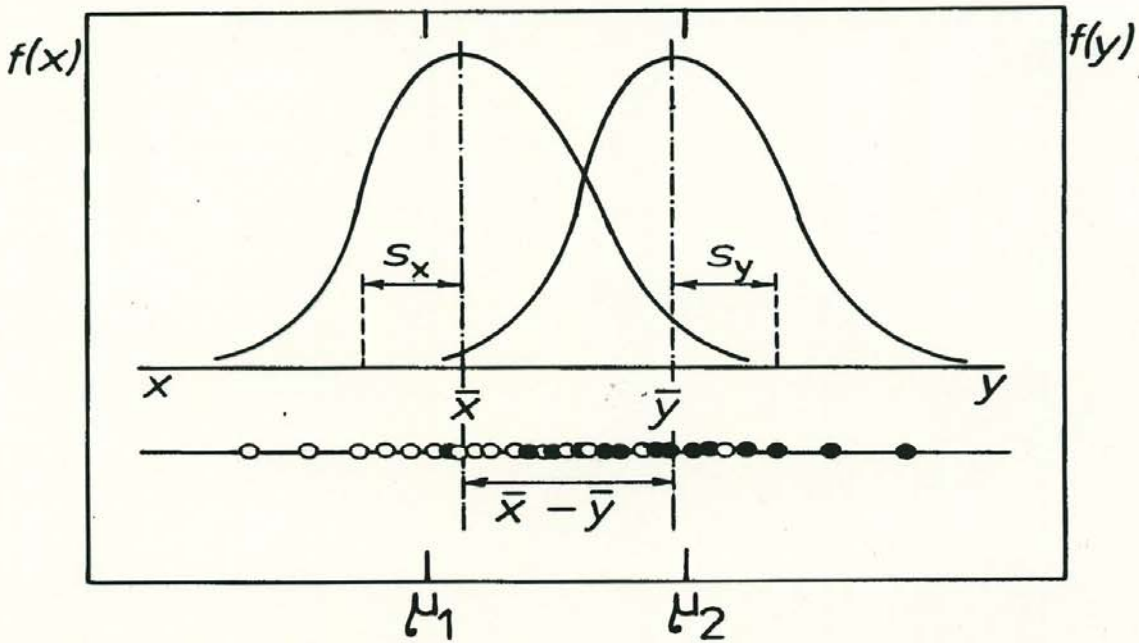
("testy shodnosti")

Klasické testy vycházejí z předpokladů:

a) výběry $\{x_i\}$, $i = 1, ..., n_1$, a $\{y_j\}$, $j = 1, ..., n_2$ jsou vzájemně nezávislé;

b) rozdělení obou výběrů je normální,

$$x_i \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \text{ a } y_j \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$



Test shodnosti výsledků při stejných rozptylech

Studentův t-test

a) **Formulace hypotéz:** H_0: $\mu_x = \mu_y$ ***vs.*** H_A: $\mu_x \neq \mu_y$,

b) **Testovací kritérium:** má tvar dle následujících podmínek

1. Je-li $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ **(homoskedasticita),** má tvar

$$T_1 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{(n_1 - 1)\, s_x^2 + (n_2 - 1)\, s_y^2}} \sqrt{\frac{n_1\, n_2\, (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

Testování: $T_1 > t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

2. Je-li $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ **(heteroskedasticita)**, má tvar

$$T_2 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}}$$

která má Studentovo rozdělení s ***"ekvivalentními"*** stupni volnosti ν

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_x^4}{n_1^2(n_1 - 1)} + \frac{s_y^4}{n_2^2(n_2 - 1)}}$$

Testování: $T_2 > t_{1-\alpha/2}(\nu)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

3. Oba výběry se odchylují od normality: má tvar

$$T_3 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}| + C + D(\bar{x} - \bar{y})^2}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}}$$

kde

$$C = \frac{1}{6} \frac{\frac{\hat{g}_{1x}}{n_1^2} \frac{s_x^3}{\sqrt{n_1}} - \frac{\hat{g}_{1y}}{n_2^2} \frac{s_y^3}{\sqrt{n_2}}}{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}$$

$$D = \frac{1}{3} \frac{\frac{\hat{g}_{1x}}{n_1^2} \frac{s_x^3}{\sqrt{n_1}} - \frac{\hat{g}_{1y}}{n_2^2} \frac{s_y^3}{\sqrt{n_2}}}{\left[\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right]^2}$$

kde $\hat{g}_{1x}$ a $\hat{g}_{1y}$ jsou výběrové šikmosti.

K užití kvantilů Studentova rozdělení pro hladiny významnosti α, je třeba přeformulovat testovací kritérium T_3 do tvaru

$$T_3 = T_2 + B_x - B_y$$

kde

$$B_x = \frac{\dfrac{\hat{g}_{1x}\, s_x^3}{6\, n_1^2 \sqrt{n_1}\left[\dfrac{s_x^2}{n_1} + \dfrac{s_y^2}{n_2}\right]} + \dfrac{\hat{g}_{1x}\, s_x^2\, (\bar{x} - \bar{y})^2}{3\, n_2^2 \sqrt{n_2}\left[\dfrac{s_x^2}{n_1} + \dfrac{s_y^2}{n_2}\right]}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{n_1} + \dfrac{s_y^2}{n_2}}}$$

a B_y se vyčíslí analogicky, pouze šikmost $\hat{g}_{1x}$ se nahradí hodnotou $\hat{g}_{1y}$, rozptyl σ_x^2 hodnotou σ_y^2 a rozsah n_1 hodnotou n_2.

Testování: $T_3 > t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

Test T_3 je robustní vůči sešikmení výběrových rozdělení i vůči heteroskedasticitě $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

4. Test Brownův a Forsythův: vhodný pro testování shody k-tice středních hodnot,

Formulace hypotéz: H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ ***vs.*** H_A: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \ldots \neq \mu_k$.

Vychází: k výběrů normálního rozdělení.

Velikosti výběrů: n_i, $i = 1, \ldots, k$.

Jsou určeny: průměry $\bar{x}_i$ a rozptyly s_i^2, $i = 1, \ldots, k$.

Testovací kritérium je formulováno

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{n_i}{\bar{n}}\right) s_i^2}, \text{ kde } \bar{X} = \frac{1}{\bar{n}} \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i \quad \text{a}$$

7. Robustní Jackknife test H_0:

$\mu_1 = \mu_2$, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $n_1 \neq n_2$, $n \geq 7$, **(heteroskedasticita)**: ve výběrech jsou vybočující měření,

Testační kritérium na tvar

$$T_5 = \frac{\bar{x}(\vartheta) - \bar{y}(\vartheta)}{\sqrt{\frac{s_{w,x}^2}{h_1} + \frac{s_{w,y}^2}{h_2}}}$$

kde

$$s_{w,x}^2 = \frac{S_{w,x}(\vartheta)}{h_1 - 1}$$

$$s_{w,y}^2 = \frac{S_{w,y}(\vartheta)}{h_2 - 1}$$

$$h_i = n_i - 2\,\mathrm{int}\left(\frac{\vartheta\, n_i}{100}\right) \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2.$$

a počet stupňů volnosti

$$\frac{1}{\nu} = \frac{z^2}{h_1 - 1} + \frac{(1 - z)^2}{h_2 - 1}$$

kde

$$z = \frac{\dfrac{s_{w,x}^2}{h_1}}{\dfrac{s_{w,x}^2}{h_1} + \dfrac{s_{w,y}^2}{h_2}}$$

Testování: $T_5 > t_{1-\alpha/2}(\nu)$, je H_0 o shodě středních hodnot na hladině významnosti α zamítnuta.

Příklad 3.32 ***Rozdíl mezi gravimetrickým a titračním stanovením P_2O_5 v kostní dřeni***

K určení obsahu oxidu fosforečného v kalcinované kostní dřeni byla použita gravimetrická (G) a titrační (T) metoda.

Ze získaných 15 hodnot určete, zda je rozdíl mezi oběma metodami významný.

Data: n = 15

G : 40.24, 40.30, 40.15, 40.20, 40.50, 40.40, 40.12, 40.12, 39.88, 40.23, 40.24, 40.12, 40.17, 40.11, 40.26.

T : 39.90, 40.22, 39.85, 39.93, 39.70, 40.12, 40.20, 39.62, 40.01, 39.77, 39.79, 39.98, 40.26, 39.77, 40.01.

Řešení: 1. Charakteristiky polohy a rozptýlení u G (a v závorce od T):

$$\bar{x} = 39.94\ \%\ (40.203\ \%),\ s^2 = 0.039\ (0.020),$$

$$\hat{g}_1 = 0.146\ (-0.027),\ \hat{g}_2 = -1.05\ (0.90).$$

2. Test shodnosti rozptylů metody G a T: H_0: $\sigma_G^2 = \sigma_T^2$ ***vs.*** H_A: $\sigma_G^2 \neq \sigma_T^2$.

Užitý test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha/2 = 0.025$	Závěr testování H_0
F-test	1.932	2.989	přijato
F-test s korekcí na stupně volnosti	1.932	2.673	přijato
Jackknife test	0.743	4.221	přijato

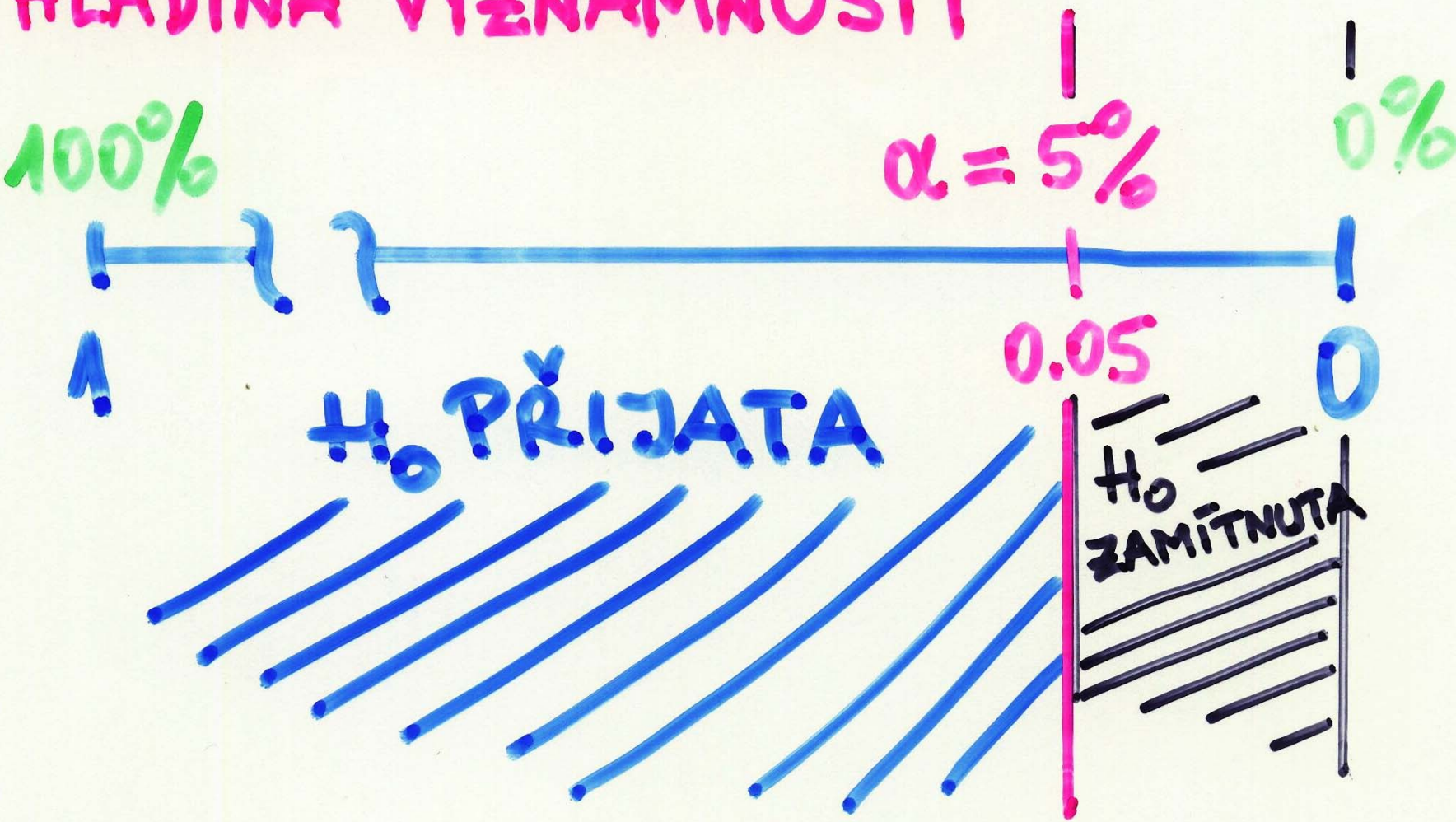
3. Test shody středních hodnot G a T: H_0: $\mu_G = \mu_T$ ***vs.*** H_A: $\mu_G \neq \mu_T$.

Užitý test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha/2 = 0.025$	Závěr testování H_0
t-test ($\sigma_G^2 = \sigma_T^2$)	4.164	2.048	zamítnuto
t-test ($\sigma_G^2 \neq \sigma_T^2$)	4.164	2.052	zamítnuto
Modifikace na šikmost, U_3	4.036	2.052	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_G^2 = \sigma_T^2$)	4.295	2.056	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_G^2 \neq \sigma_T^2$)	4.215	2.086	zamítnuto

Závěr:

1. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ nelze považovat výsledky obou metod za shodné.
2. Předpoklad shodnosti rozptylů zde vede jen k nepatrnému zpřísnění oboustranného testu, protože kvantil pro $\alpha = 0.05$ je poněkud nižší než odpovídající kvantil pro případ $\sigma_G^2 \neq \sigma_T^2$.

HLADINA VÝZNAMNOSTI



α SPOČTENÁ

Příklad 3.31 ***Test shody dvou analytických metod stanovení jodového čísla***

Na osmi vzorcích sojového oleje bylo stanoveno jodové číslo metodou Hanuše (H) a metodou Wijssovou (W).

Určete, zda obě metody vedou ke stejným výsledkům.

Data: n = 8,

H : 139.90, 139.80, 138.90, 136.40, 139.40, 140.90, 139.20, 139.40.
W : 139.40, 139.90, 140.20, 140.30, 140.60, 140.90, 140.10, 140.30.

Řešení: 1. Míry polohy a rozptýlení pro metodu H (a W v závorce):

$$\bar{x} = 139.24\ (140.21),\ s^2 = 1.677\ (0.201),$$

$$\hat{g}_1 = -1.25\ (-0.31),\ \hat{g}_2 = 1.22\ (-0.21).$$

2. Výrazný rozdíl v rozptylech, ale i v šikmostech, svědčí o přítomnosti vybočujícího pozorování s nízkou hodnotou u dat H.

3. Test shodnosti rozptylů H_0: $\sigma_H^2 = \sigma_W^2$ ***vs.*** H_A: $\sigma_H^2 \neq \sigma_W^2$.

Užitý test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha/2 = 0.025$	Závěr testování H_0
F-test	8.33	4.995	zamítnuto
F-test s korekcí na stupně volnosti	8.33	39.000	přijato
Jackknife test	2.83	4.857	přijato

4. Test shody středních hodnot H a W: H_0: $\mu_H = \mu_W$ ***vs.*** H_A: $\mu_H \neq \mu_W$.

Užitý test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha/2 = 0.025$	Závěr testování H_0
t-test ($\sigma_H^2 = \sigma_W^2$)	2.012	2.145	přijato
t-test ($\sigma_H^2 \neq \sigma_W^2$)	2.012	2.2281	přijato
Modifikace na šikmost, U_3	2.573	2.2281	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_H^2 = \sigma_W^2$)	3.533	2.179	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_H^2 \neq \sigma_W^2$)	3.394	2.228	zamítnuto

Závěr:

1. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ ukazují oboustranné klasické testy na opačné závěry než robustní.
2. Robustní testy potvrzují, že rozdíly mezi oběma metodami nejsou zanedbatelné, i když jsou rozptyly odlišné nevýznamně.
3. Ke stejným závěrům vedou i modifikace testů na nenulovou šikmost a špičatost.

Příklad 3.29 ***Test shody obsahu listové kyseliny ve dvou vzorcích***

Pro fotometrické stanovení listové kyseliny je možné využít barevné reakce s 1,2 naftochinon-4-sulfonovou kyselinou. Měří se absorbance při 485 nm. Na dvou tabletách s deklarovaným obsahem 5 mg bylo provedeno 10 stanovení obsahu kyseliny listové.

Zjistěte, zda jsou obsahy listové kyseliny v obou tabletách stejné.

Data: n = 10, [mg]

Tableta A: 5.45, 5.15, 7.71, 5.55, 4.75, 5.32, 5.53, 5.09, 5.70, 4.42.

Tableta B: 4.98, 4.84, 4.77, 4.91, 4.84, 4.98, 4.91, 5.21, 4.67, 5.21.

Řešení: 1. Bodové charakteristiky jsou pro tabletu A (v závorce pro B):

$$\bar{x} = 5.467\ (4.932),\quad s^2 = 0.775\ (0.030),$$

$$\hat{g}_1 = 1.665\ (0.432),\quad \hat{g}_2 = 2.51\ (-0.63).$$

V hodnotách pro tabletu A je však indikováno vybočující měření.

2. Nulová hypotéza H_0: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ *vs.* $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$: Výsledek testu s korigovanými stupni volnosti je zde ovlivněn tím, že se nepředpokládají vybočující hodnoty, ale sešikmené rozdělení.

Užitý F-test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha/2 = 0.025$	Závěr testování H_0
F-test	25.63	4.026	zamítnuto
F-test s korekcí na stupně volnosti	25.63	647.79	přijato
Jackknife test	6.452	4.560	zamítnuto

3. Nulová hypotéza H_0: H_0: $\mu_A = \mu_B$ *proti* H_A: $\mu_A \neq \mu_B$: Kromě klasických t-testů vychází u ostatních testů rozdíl středních hodnot obsahu kyseliny listové jako statisticky významný.

Užitý test	Hodnota testovacího kritéria	Kvantil pro $\alpha = 0.05$	Závěr testování H_0
t-test ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$)	1.886	2.100	přijato
t-test ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$)	1.886	2.201	přijato
Modifikace na šikmost, U_3	2.557	2.201	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2$)	2.585	2.120	zamítnuto
Robustní t-test ($\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$)	2.508	2.201	zamítnuto

Závěr:

Ponechají-li se v datech silně odchýlené hodnoty (u tablety A je to 7.71), neposkytují F-test a t-test správné výsledky. Řešením jsou robustní testy, které v takovém případě eliminují vliv silně vychýlených hodnot.

Testy parametrů dvou souborů

Porovnání dvou výběrů

$$\{x_i\},\ i = 1, \ldots, n_1, \quad \text{a} \quad \{y_j\},\ j = 1, \ldots, n_2,$$

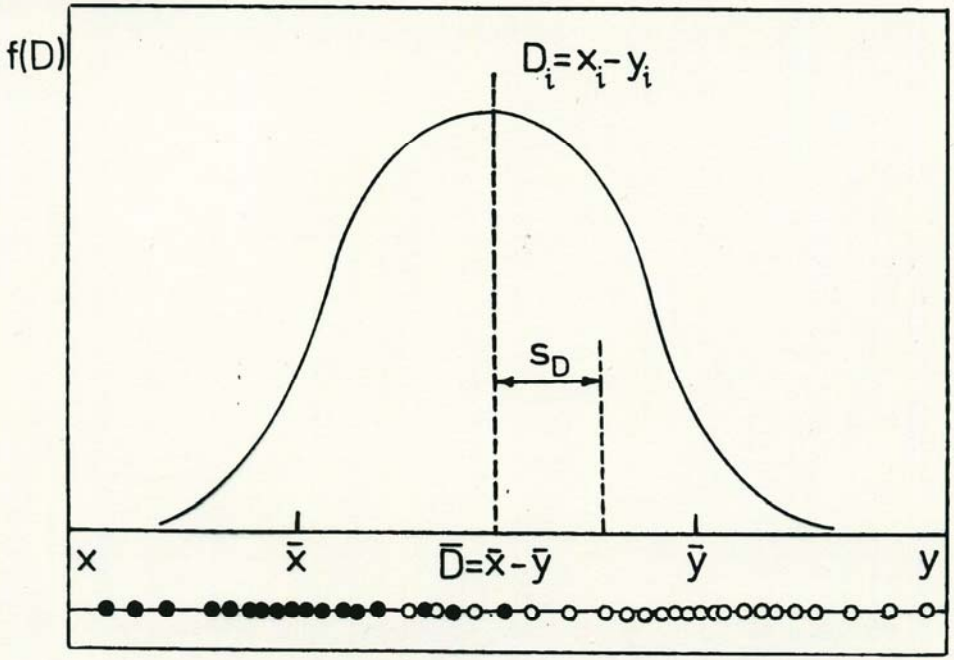
v přírodních i technických vědách:

a) porovnání výsledků z různých instr. metod nebo laboratoří,

b) ověřování dělení heterog. výběrů do homogenních podskupin,

c) hodnocení rozdílu mezi rozličnými materiály nebo přístroji.

Párový test:



Zadání párového testu

- mezi prvky obou výběrů existuje jistá logická vazba,

- prvky x_i vlastnosti před úpravou a prvky y_i po úpravě materiálu ***těchže*** vzorků ($n_1 = n_2$),

- utvoříme jednorozměrný výběr, $D_i = x_i - y_i$,

- střední hodnota μ_D se významně neliší od nuly, $\mu_x = \mu_y$,

$$H_0 : \mu_D = 0 \quad \text{vs.} \quad H_A : \mu_D \neq 0$$

$$t_{exp} = \frac{\mu_D - 0}{s_D} \sqrt{n}$$

TESTOVÁNÍ: Je-li $t_{exp} < t_{1-\alpha/2}(n-1)$,

je H_0 přijata.

Příklad 3.30 ***Párový test při ověření nové metody stanovení dinitrokresolu***

Při stanovení obsahu dinitrokresolu v postřikovacím přípravku se užívá poměrně pracné polarografické metody (P). Ukázalo se, že rychlejší a levnější je titrační stanovení (T).

Na 8 vzorcích byl proto určen obsah dinitrokresolu oběma metodami.

Určete, zda je možné nahradit polarografickou metodu metodou titrační.

Data: n = 8, [% stanoveného dinitrokresolu]:

P : 18.60, 27.60, 27.50, 25.00, 24.50, 26.80, 29.50, 26.50

T : 18.58, 27.37, 27.70, 24.64, 24.10, 26.33, 29.33, 26.63

Řešení:

1. Vypočteme míry polohy a rozptýlení pro obě metody a pro párové diference $d_i = P_i - T_i$.

2. Všechny tři varianty F-testu ukazují na shodu obou rozptylů při zvolené hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

3. Všechny varianty dvou výběrových t-testů ukazují také na shodu obou průměrů.

4. Testujeme-li však hypotézu párového t-testu H_0: $d = \mu_P - \mu_T = 0$ ***vs.*** H_A: $d \neq 0$, je testovací kritérium $T_P = 2.444 > t_{0.975}(7) = 2.364$ čili ***rozdíl mezi párovými hodnotami je statisticky významný.***

Statistické charakteristiky polohy a rozptýlení

Výběrová charakteristika	Soubor P	Soubor T	Diference $d_i = P_i - T_i$
$\bar{x}$	25.75	25.59	0.165
s^2	10.78	10.79	0.191
$\hat{g}_1$	-1.302	-1.201	-
$\hat{g}_2$	3.985	3.709	-

Závěr:

Variabilita mezi jednotlivými úrovněmi dinitrokresolu zde překrývá variabilitu obou metod stanovení (shoda středních hodnot).

Paralelním opakováním se docílilo eliminace variability mezi vzorky, a tím se také odhalilo, že obě metody poskytují vlastně odlišné výsledky.

- pro každý výběr se konstruuje krabicový graf,

- k ověření shody rozdělení obou výběrů se užívá **Q-Q graf**,

- ***při shodě obou rozdělení*** by měly body $\{y_{(i)}, x_{(i)}\}$ ideálně ležet na přímce $y = x$.

- ***směrnice přímky není rovna jedné***, pak se obě rozdělení liší o jistý násobek, úměrný velikosti směrnice.

- ***úsek na ose y nenulový***, pak velikost úseku udává posun středních hodnot obou výběrů.

- v Q-Q grafu ***regresní přímka*** $y_{(i)} = k \; x_{(i)} + q$, t. zn. střední hodnota výběru $y_1, ..., y_n$ je $\bar{y} = k \; \bar{x} + q$ a pro rozptyl platí $s_y^2 = k^2 s_x^2$.

- ***nelineární průběh Q-Q grafu*** indikuje rozdíly v typu rozdělení obou výběrů.

K určení ***kvantilů s větším počtem prvků*** se počítají

$$v_j = \frac{n_1}{n_2}(j - 0.5) + 0.5$$

a interpolovaný kvantil x_j se vyčíslí podle

$$\tilde{x}_j = (1 - z)\, x_{(k)} + z\, x_{(k+1)} ,$$

kde $k = \mathrm{int}(v_j)$ je celočíselná část čísla v_j a $z = v_j - k$.

Formulace hypotéz: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ***vs.*** $H_A: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Testová statistika: $$\chi^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2}$$

Čím je hodnota $(1 - \alpha/2)$ u oboustranného testu bližší jedné (např. větší než 0.975), tím věrohodnější bude zamítnutí nulové hypotézy H_0.

Testy významnosti souvisejí s intervaly spolehlivosti:

Pokud 100(1 - α) %ní interval spolehlivosti parametru Θ obsahuje zadanou hodnotu Θ_0, nelze na hladině významnosti α zamítnout hypotézu $H_0 : \Theta = \Theta_0$.

Příklad 3.17 ***Testace střední hodnoty u výběru z lognormálního rozdělení***

Pro výběr z lognormálního rozdělení proveďte testování, zda střední hodnota obsahu mědi ve vzorku kaolinu odpovídá předepsané hodnotě normy M = 10. Hypotéza H_0: M = 10 a H_A: M ≠ 10.

Řešení:

K testování využijeme testační statistiku $u = |\hat{M} - 10| / \sqrt{D(\hat{M})}$, která má pro velké rozsahy výběru přibližně normované normální rozdělení.

Protože je u = |9.976 - 10| / 0.02 = 1.2 menší než kvantil $u_{1-\alpha/2}$ = 1.96 pro α = 0.05, nelze zamítnout hypotézu H_0 o tom, že střední hodnota obsahu mědi je rovna 10.

Závěr: Příklad ukazuje úzkou souvislost výsledku testování s 95%ním intervalem spolehlivosti pro μ.

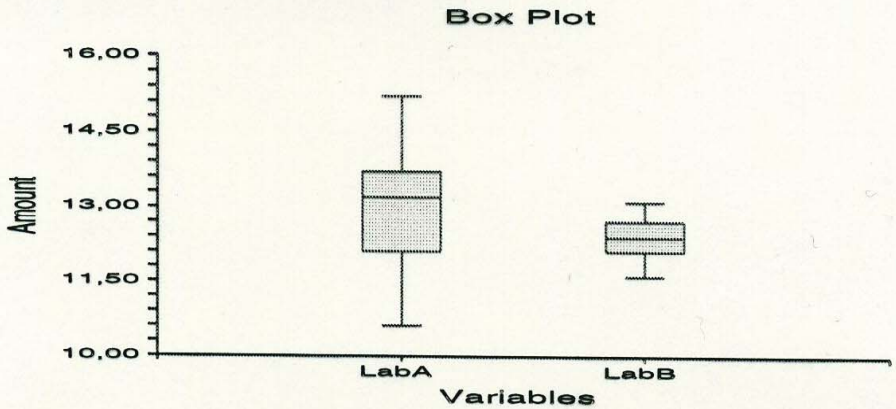
Test shodnosti středních hodnot

Na úloze *Porovnání práce dvou laborantek* ukážeme aplikaci testu shodnosti. Dvě laborantky prováděly analýzu koncentrace mukoproteinů. Určete, zda obě dospěly ke stejným výsledkům. Test shodnosti proveďte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Data: Stanovení koncentrace mukoproteinů v g/l laborantkou A a laborantkou B:

A:	11.6	12.1	13.2	12.1	10.6	13.3	13.7	14.4	15.2	13.6	13.7	12.4	12.5
B:	12.4	12.8	12.3	12.7	12.4	12.5	11.9	13.1	12.7	12.5	11.8	11.6	12.3

Řešení: Z ověření základních předpokladů pro jednotlivé výběry vyplývá, že data v obou výběrech jsou nezávislá, homogenní bez odlehlých bodů, test normality u obou výběrů prokázal Gaussovo rozdělení.



Krabicový graf porovnání dvou výběrů, ***NCSS2000***

Porovnání dvou výběrů (výstup programu ADSTAT)

(1) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

Parametr	Výběr č.1	Výběr č.2	Celkově
Velikost výběru	13	13	26
Průměr	12.954	12.385	12.669
Rozptyl	0.1516	0.1764	0.8123
Šikmost	-0.070	-0.344	-0.101
Špičatost	2.588	2.503	4.208

(2) TEST HOMOGENITY ROZPTYLU (hypotéza H0: s1^2 = s2^2):

Fisher-Snedecor F-test:

Počet stupňů volnosti	Df1	:	12
	Df2	:	12
Tabulkový kvantil F(1-alfa/2,Df1,Df2)		:	3.2773
F-statistika		:	8.5937

Závěr: *Rozptyly se považují za rozdílné, H0 zamítnuta*

(3) TEST SHODY PRŮMĚRU (hypotéza H0: $\mu 1 = \mu 2$):

t-test(pro různé rozptyly)

Počet stupňů volnosti Df1	:	16
Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1)	:	2.1199
t-statistika	:	1.5776

Závěr: *Průměry se považují za shodné, H0 přijata*

Závěr: Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ potvrzuje oboustranný klasický test shodu středních hodnot obou výběrů i při významné odlišnosti obou rozptylů.

Obě laborantky dosáhly stejných výsledků, i když každá s jinou variabilitou.

Příklad 3.27 ***Test čistoty komerční chemikálie***

Fosforečnan amonný analytické čistoty "čistý" musí obsahovat alespoň 99 % vlastní sloučeniny a pouze 1 % nečistot. Analýza komerčního fosforečnanu amonného byla 18krát reprodukována.

Ověřte, zda tato chemikálie dosahuje požadované čistoty.

Data: n = 18, obsah [%]

99.7, 97.2, 97.9, 97.8, 98.2, 97.4, 97.3, 98.0, 97.9, 98.0, 98.1, 98.4, 98.7, 97.3, 97.9, 96.7, 97.0, 98.1.

Řešení:

Bylo rozhodnuto počítat aritmetický průměr $\bar{x}_R = 97.8$ z dat, ze kterých byla vyloučena největší a nejmenší hodnota, což odpovídá přibližně 10%nímu uřezanému průměru.

Pro stanovení chyby odhadu $\bar{x}_R$ a 95%ního intervalu spolehlivosti bylo užito metody Bootstrap s B = 400 simulacemi a bylo vyčísleno:

$$\bar{x}_B = 97.7,\ \sigma_B^2 = 0.1102.$$

Pro 95%ní interval spolehlivosti očekávané hodnoty $E(\bar{x}_R)$ je

$$97.10 \leq E(\bar{x}_R) \leq 98.35.$$

a 95%ní interval spolehlivosti očekávané hodnoty $E(\bar{x}(10\%))$ je

$$97.53 \leq E(\bar{x}_R) \leq 98.12.$$

Závěr: Jelikož oba 95%ní intervaly spolehlivosti $E(\bar{x}_R)$ a $E(\bar{x}(10\%))$ nepokrývají hodnotu 99 %, nelze fosforečnan amonný označit jako "čistý".

Párový test

Na vzorové úloze *Zkoušení obsahu niklu v drátu a svarovém kovu u párových dat* ukážeme párový test.

Data: Párová data obsahu niklu [%] (a) ve drátu, (b) ve sváru a (c) rozdíl párového hodnoty:

25.49	25.55	-0.06,	25.79	25.23	0.56,	25.32	25.56	-0.24,
11.59	11.34	0.25,	11.43	11.12	0.31,	11.01	10.76	0.25,
11.12	11.15	-0.03,	10.76	10.70	0.06,	10.96	10.51	0.45,
10.88	10.88	0.00,	25.86	25.28	0.58,	25.17	24.31	0.86,
25.79	24.75	1.04,	25.47	25.83	-0.36,	10.12	10.36	-0.24,
9.61	9.92	-0.31,	9.87	9.85	0.02,	9.94	10.04	-0.1,
9.91	9.93	-0.02,	10.38	10.11	0.27,	11.61	10.52	1.09,
11.27	10.96	0.31,	11.00	10.54	0.46,	9.88	10.04	-0.16,
10.09	10.25	-0.16,	9.94	9.81	0.13,	9.61	9.88	-0.27,
13.29	13.45	-0.16,	13.13	13.2	-0.07,	12.83	12.93	-0.1,
13.27	13.5	-0.23,	12.83	13.16	-0.33,	13.02	13.22	-0.2,
12.95	13.48	-0.53,	12.83	12.91	-0.08,	13.53	13.58	-0.05,
13.55	13.76	-0.21,	13.46	13.69	-0.23,	13.27	13.63	-0.36,
13.06	13.31	-0.25,	13.4	13.33	0.07,	13.24	13.69	-0.45,
13.52	13.39	0.13,	13.67	13.45	0.22,	13.27	13.17	0.10,

Řešení: Užijeme t-test (párový) v programu ADSTAT a v programu NCSS2000:

Párový test (výstup programu ADSTAT)

Průměrný rozdíl párové hodnoty:	0.04355
Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,Df1):	2.0154
t-statistika:	9.7281

Závěr: *Průměry se považují za rozdílné, H0 zamítnuta*

Párový test (výstup programu NCSS2000)

Descriptive Statistics Section

Variable	Count	Mean	Standard Deviation	Standard Error	95% LCL of Mean	95% UCL of Mean
H322A	45	13.95533	5.209211	0.7765434 1	2.39031	15.52035
H322B	45	13.91178	5.109474	0.7616755 1	2.37672	15.44683
Difference	45	4.355E-02	0.3687457	5.4969E-02	-6.7224E-02	0.154339

T for Confidence Limits = 2.0154

Tests of Assumptions about Differences Section

	Assumption	Value	Probability	Decision(5%)
Skewness	Normality	2.9749	0.002931	Reject normality
Kurtosis	Normality	1.6081	0.107817	Cannot reject normality
Correlation Coefficient		0.997633		

T-Test For Difference Between Means Section

Alternative Hypothesis	T-Value	Prob Level	Decision (5%)	Power (Alpha=.05)	Power (Alpha=.01)
H322A-H322B ≠ 0	0.7924	0.432402	Accept Ho	0.121168	0.035352
H322A-H322B<0	0.7924	0.783799	Accept Ho	0.007650	0.000984
H322A-H322B>0	0.7924	0.216201	Accept Ho	0.193617	0.059613

Závěr: Párový test zamítl hypotézu o shodě obsahu niklu v drátu a svárovém kovu.

Příklad 3.18 *Test shody průměrů dvou výběrů téhož rozdělení*

Byla generována data dvou dvojic výběrů, každý výběr o rozsahu n = 50. První dvojice výběrů pocházela z normálního rozdělení N(0, 1) a N(3, 1). Druhá pak z Laplaceova rozdělení L(0, 2) a L(2, 2). Zvolte vhodnou testovací statistiku a testujte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$, zda lze pro dvojice výběrů považovat střední hodnoty za shodné.

Data:

A) Výběr z rozdělení N(0, 1):
B) Výběr z rozdělení N(3, 1):
C) Výběr z rozdělení L(0, 2):
D) Výběr z rozdělení L(2, 2):

Řešení: Z použití F-testů: homoskedasticita a lze užít testy T_1, T_3 a T_4.

Tabulka 3.14 Testovací statistiky a odpovídající kvantily pro $\alpha = 0.05$

Testovací statistika	Výběry z N(0, 1) a N(3, 1)	Výběry z L(0, 2) a L(2, 2)
T_1 při $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$	3.796	1.693
kvantil	1.985	1.985
T_3	14.39	6.392
kvantil	1.984	1.985
T_4	15.035	8.394
kvantil	1.988	1.988

Závěr: Testy ukazují na výrazné rozdíly středních hodnot na $\alpha = 0.05$.

Příklad 3.19 *Testy shody rozptylů dvou výběrů téhož rozdělení*

Pro dvě dvojice výběrů generovaných dříve ověřte, zda lze považovat jejich rozptyly za shodné na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Řešení: K testování byl užit klasický F-test (F) a Jackknife-test (F_J). V tabulce jsou uvedeny testovací statistiky spolu s odpovídajícími kvantily pro $\alpha = 0.05$.

Testovací statistiky spolu s odpovídajícími kvantily pro $\alpha = 0.05$

Testovací charakteristika	Výběr z rozdělení N(0, 1) a N(3, 1)	Výběr z rozdělení L(0, 2) a L(2, 2)
F	1.006	1.003
kvantil	1.762	1.762
F_J	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$2.21 \cdot 10^{-5}$
kvantil	3.831	3.831

Závěr: Oba testy správně ukazují na shodu rozptylů v obou dvojicích. Platí, že F-testy jsou obecně citlivější na porušení klasických předpokladů o datech než T-testy.

Příklad 3.24 ***Stanovení nikotinu v krvi plynovou chromatografií***

Bylo prokázáno, že obsah nikotinu v krvi je možné určit plynovou chromatografií až do koncentrace 1 ng ml^{-1}.

Ověřte, zda lze stanovit i vyšší koncentrace uměle připravených vzorků:

A obsahoval 10 ng ml^{-1} a byl proměřen 12×,

B s obsahoval 50 ng ml^{-1} a byl proměřen 10×.

Data: Vzorek (A): n = 12, μ = 10 ng ml^{-1},

8.40, 9.59, 9.38, 9.10, 10.78, 11.41, 9.94, 10.08, 12.11, 9.10, 9.59, 10.36.

Vzorek (B): n = 10, μ = 50 ng ml^{-1},

47.5, 48.4, 48.8, 48.4, 46.8, 46.2, 48.6, 50.6, 45.5, 46.1.

Řešení: Vzhledem k malému počtu dat použijeme Hornův postup:

Vzorek A: $H_L = 3$, $P_L = 9.94$, $R_L = 1.68$ a pro

95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty platí $9.128 \leq \mu \leq 10.75$. Protože interval obsahuje hodnotu 10, je stanovení správné a lze ho užít pro stanovení obsahu nikotinu 10 ng ml^{-1}.

Vzorek B: $H_L = 3$, $P_L = 47.4$, $R_L = 2.4$ a pro

95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty platí $45.79 \leq \mu \leq 49.00$. Protože tento interval neobsahuje skutečnou hodnotu 50 ng ml^{-1}, je stanovení nesprávné a nelze ho doporučit pro tuto koncentraci nikotinu.

Závěr: Obsah nikotinu ve vzorku (A) je plynovou chromatografií určen správně, zatímco ve vzorku (B) nesprávně.

Příklad 3.25 ***Porovnání dvou metod stanovení P_2O_5***

Koncentrace oxidu fosforečného v hnojivu byla stanovena dvěma metodami, a to s využitím citronanu (A) a s využitím kyseliny sírové (B). Bylo provedeno 14 stanovení P_2O_5 oběma metodami.

Ověřte, zda oba výběry pocházejí z téhož rozdělení.

Data:

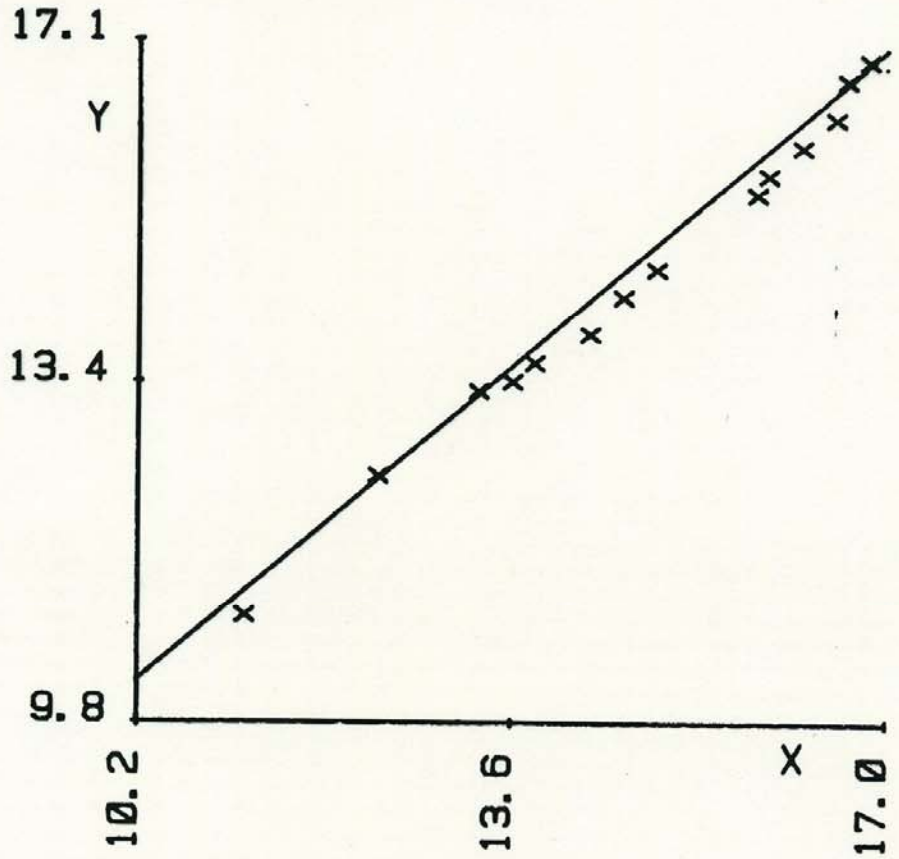
Metoda A [%]: 16.3, 15.5, 16.7, 16.0, 13.7, 11.0, 12.5, 13.4, 14.4, 14.7, 16.9, 15.7, 13.5, 14.0.

Metoda B [%]: 16.5, 15.9, 16.6, 15.8, 13.3, 11.2, 12.4, 13.6, 14.9, 14.6, 16.8, 16.2, 13.8, 14.3.

Řešení: K ověření shody rozdělení obou výběrů je vhodné užít Q-Q grafu.

Shodu rozdělení obou výběrů potvrzuje Q-Q graf lineárním průběhem, neboť přímka má směrnici 0.995, úsek -0.041 a korelační koeficient r = 0.9961.

Tím je potvrzeno, že oba výběry pocházejí z téhož rozdělení, se shodnými parametry rozptýlení, protože směrnice je přibližně jednotková, a i shodnými parametry polohy, protože je úsek blízký nule.



Q-Q graf pro test shodnosti dvou rozdělení

Závěr: Oba výběry pocházejí ze stejného rozdělení. Metody stanovení oxidu fosforečného poskytují stejné výsledky.

Analýza velkého výběru

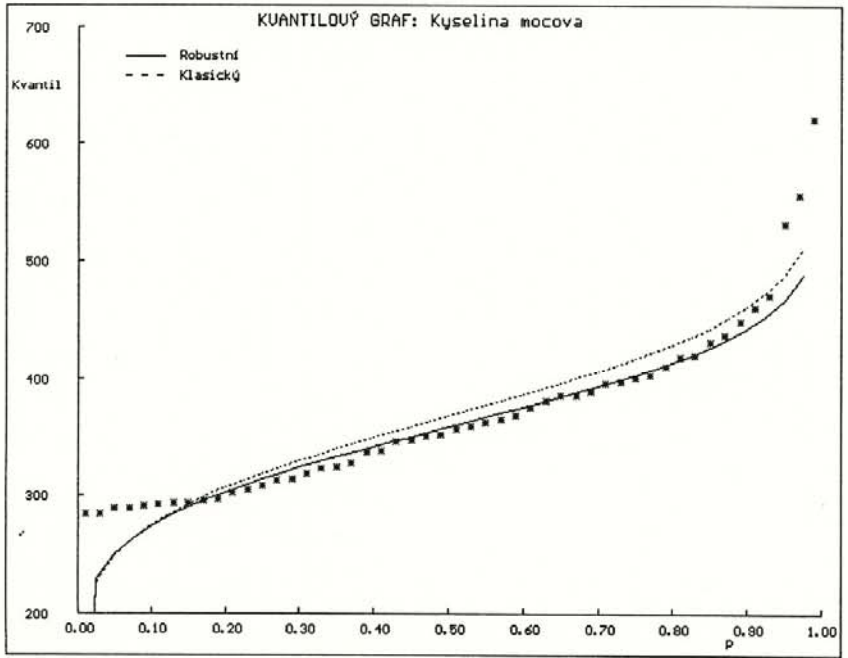
Na úloze **B2.25** *Koncentrace kyseliny močové v krvi dárců* ukážeme postup analýzy velkého výběru s odlehlými prvky pro určení typu rozdělení koncentrace kyseliny močové u 50 dárců krve. Jaká je míra polohy a rozptýlení uvedeného výběru?

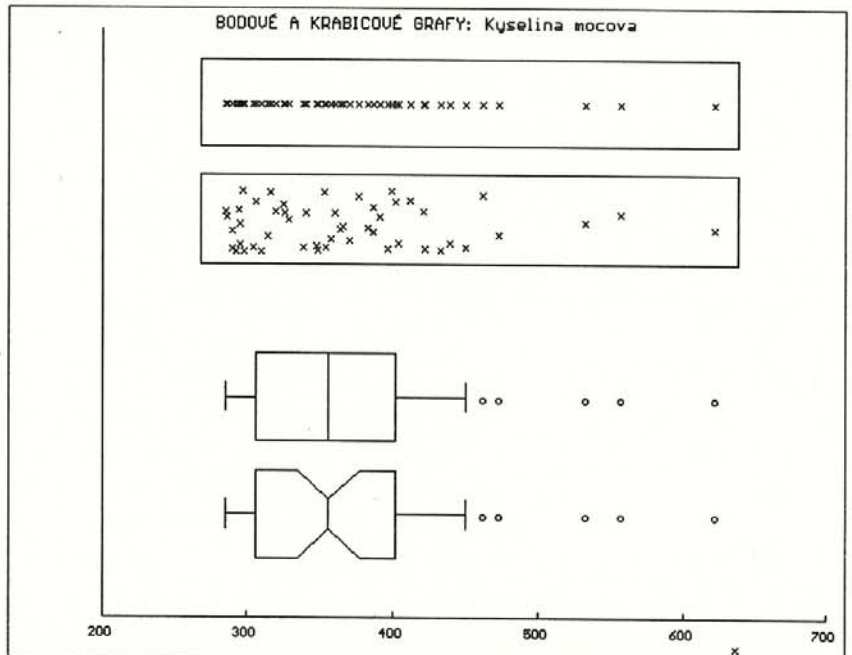
***Data*:** Koncentrace kyseliny močové [μmol/l]:

295	325	320	316	314	310	306	304	298	297
462	294	292	290	286	285	622	557	532	473
397	450	439	433	422	421	412	404	402	399
358	391	387	387	383	377	370	366	364	360
295	354	353	349	348	340	339	329	326	290

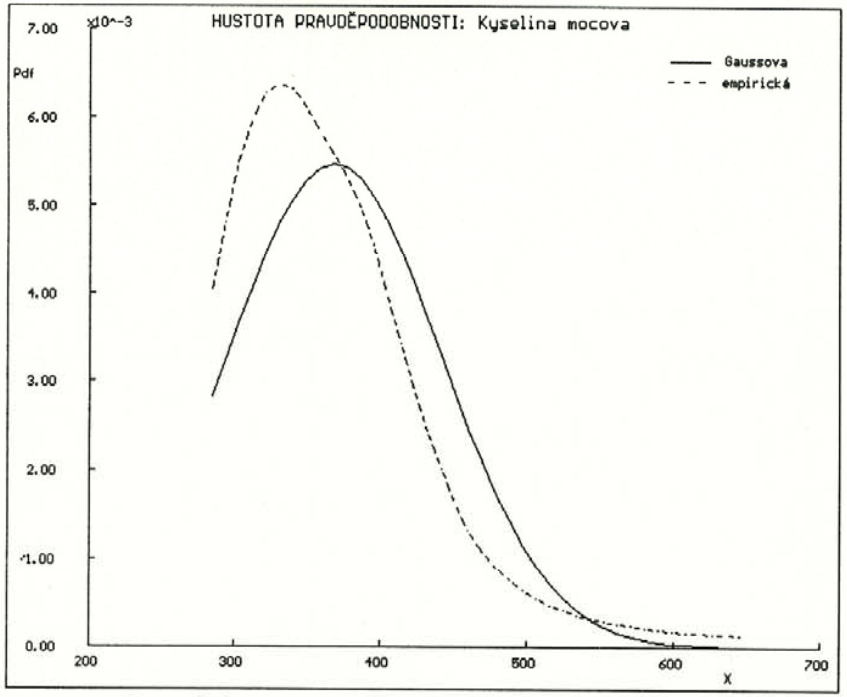
Řešení:

1. PRŮZKUMOVÁ (EXPLORATORNÍ) ANALÝZA DAT



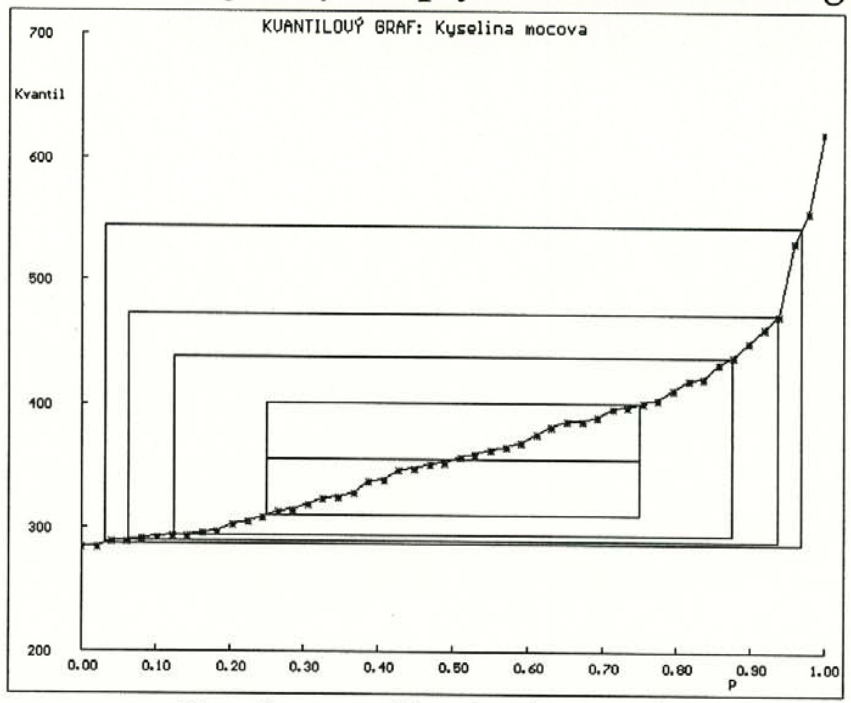


Kvantilový graf



Graf hustoty pravděpodobnosti

Diagramy rozptýlení a krabicové grafy



Graf rozptýlení s kvantily

Poznatky z grafů:

1. Výběrové rozdělení je asymetrické a silně sešikmené.

2. V horní části pořádkových statistik lze indikovat 3 až 5 podezřelých bodů, z nich se 3 jeví jako vysloveně odlehlé. Nelze proto použít klasických odhadů polohy a rozptýlení.

2. OVĚŘENÍ ZÁKLADNÍCH PŘEDPOKLADŮ O VÝBĚRU

Ověření předpokladů o výběru (výstup programu ADSTAT)

(a) TEST NORMALITY:

Tabulkový kvantil Chi^2(1-alfa,2)	:	5.9915
Chi^2-statistika	:	29.199

Závěr: *Předpoklad normality zamítnut*

Vypočtená hladina významnosti	:	4.5661E-07

(b) TEST NEZÁVISLOSTI:

Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,n+1)	:	2.0076
Test autokorelace	:	1.0266

Závěr: *Předpoklad nezávislosti přijat*

Vypočtená hladina významnosti	:	0.1547

(c) DETEKCE ODLEHLÝCH BODŮ: modifikované vnitřní hradby:

Dolní vnitřní hradba	:	109.62
Horní vnitřní hradba	:	602.38
Bod číslo 17 (horní)	:	622.00

Parametry s vynechanými odlehlými hodnotami:

Průměr	:	363.29
Směrodatná odchylka	:	63.875
Šikmost	:	0.9700
Špičatost	:	3.8090

Poznatky z výstupu:

1. Předpoklad o normalitě rozdělení je zamítnut, protože hodnota testovacího kritéria Chi^2 je vyšší než tabulkový kvantil.

2. Předpoklad nezávislosti je přijat, protože hodnota testovacího kritéria je nižší než tabulkový kvantil.

3. Data nejsou homogenní, mimo modifikované vnitřní hradby B_D = 109.62 μmol/l, B_H = 602.38 μmol/l leží hodnota č. 17, a to 622.0 μmol/l.

4. Po odstranění odlehlé hodnoty je aritmetický průměr $\bar{x}$ = 363.29 μmol/l a směrodatná odchylka s = 63.875 μmol/l.

5. Protože se však jedná o biochemická data, nelze odlehlou hodnotu vyloučit. Znamenalo by to zde totiž ztrátu informace.

3. MOCNINNÁ TRANSFORMACE

Transformace dat (výstup programu ADSTAT)

(a) PROSTÁ MOCNINNÁ TRANSFORMACE:	Opravený průměr:	350.91
(b) BOX-COXOVA TRANSFORMACE:	Opravený průměr:	**362.17**

Poznatky z výstupu:

1. Rozdělení souboru vykazuje mírné sešikmení.

2. Soubor obsahuje jeden výrazně odlehlý bod.

3. Mocninná transformace zde selhává.

4. Box-Coxova transformace přináší zlepšení parametrů šikmosti a špičatosti souboru a je robustní vůči odlehlé hodnotě. Věrohodnější se proto jeví odhad, získaný metodou Boxovy-Coxovy transformace, a to **362.17 μmol/l.**

4. ODHADY POLOHY, ROZPTYLU A TVARU

Odhady polohy, rozptýlení a tvaru (výstup programu ADSTAT)

(a) PARAMETRY TVARU:

Šikmost	:	1.3299
Špičatost	:	5.0034

(b) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ :

Průměr	:	368.46
Směr. odchylka	:	73.044

95.0% spolehlivost: Mez spodní: **347.70** horní: **389.22**

(c) OSTATNÍ ODHADY POLOHY:

Odhad modu	:	293.00
Odhad polosumy	:	453.50

(d) ROBUSTNÍ ODHADY PARAMETRŮ :

Medián	:	356.00
Směr. odchylka mediánu	:	85.476

95.0% spolehlivost: Mez spodní: **331.52** horní: **380.48**

Uřezání 5% (pro P=0.05):

Průměr	:	361.38
Směr. odchylka	:	68.636

95.0% spolehlivost: Mez spodní: **340.94** horní: **381.82**

Uřezání 10% (pro P=0.10):

Průměr	:	358.35
Směr. odchylka	:	67.344

95.0% spolehlivost: Mez spodní: **339.10** horní: **377.60**

Biweight:

Průměr	:	358.17
Směr. odchylka	:	63.086

95.0% spolehlivost: Mez spodní: **339.29** horní: **377.05**

(e) ADAPTIVNÍ ODHADY PARAMETRŮ: Hoggovy odhady:

Průměr	:	356.46
Směr. odchylka	:	72.722

95.0% spolehlivost: Mez spodní: **335.79** horní: **377.13**

Poznatky z výstupu:

1. Dobrým odhadem střední hodnoty se jeví uřezané aritmetické průměry ale především předešle retransformovaný průměr metodou dle Boxe a Coxe, a to **362.17 μmol/l.**

2. Výpočet aritmetického průměru při vynechání odlehlého bodu podstatně zlepší variabilitu souboru a potvrzuje především robustnost retransformovaného průměru vůči odlehlé hodnotě.

Analýza malého výběru

Na vzorové úloze **B3.01** *Střední hodnota haptoglobinu v lidském krevním séru* ukážeme Hornův postup analýzy malých výběrů.
Data: *Koncentrace haptoglobinu [g l^{-1}]: 1.82 3.32 1.07 1.27 0.49 3.79 0.15 1.98*

Řešení: Hornův postup pivotů pro malé výběry ($4 < n < 20$):

1. Pořádkové statistiky:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_{(i)}$	0.15	0.49	1.07	1.27	1.82	1.98	3.32	3.79

2. Hloubka pivotu: n = **8**, sudé

$$H = int\,\frac{\frac{m+1}{2}+1}{2}$$

int(2.75) ≈ 2

3. Pivoty: *Dolní pivot* $x_D = x_{(H)}$ $x_{(2)} = 0.49$

Horní pivot $x_H = x_{(n+1-H)}$ $x_{(7)} = 3.32$

4. Pivotová polosuma $P_L = \frac{x_D + x_H}{2}$ $= 1.905$

5. *Pivotové rozpětí* $R_L = x_H - x_D$ $\qquad 3.32 - 0.49 = 2.83$

6. *95%ní interval spolehlivosti střední hodnoty μ:* $\qquad t_{L,\,1-\alpha/2} = 0.564$

$$P_L - R_L\, t_{L,1-\alpha/2}(n) \leq \mu \leq P_L + R_L\, t_{L,1-\alpha/2}(n)$$

$$1.905 - 2.83 \times 0.564 \leq \mu \leq 1.905 + 2.83 \times 0.564$$

$$0.31 \leq \mu \leq 3.50$$

7. *Závěr:* Bodový odhad míry polohy je **1.91 g/l**, míry rozptýlení **2.83** a intervalový odhad míry polohy je **0.31 g/l ≤ μ ≤ 3.50 g/l**.

Počítačová analýza malého výběru

Analýza jednorozměrných dat na počítači (výstup programu ADSTAT)

(a) TEST NORMALITY:

Tabulkový kvantil Chi^2(1-alfa,2):	5.9915
Chi^2-statistika:	0.80885
Závěr: *Předpoklad normality přijat*	
Vypočtená hladina významnosti:	0.66736

(b) TEST NEZÁVISLOSTI:

Tabulkový kvantil t(1-alfa/2,n+1):	2.2622
Test autokorelace:	1.0768
Závěr: *Předpoklad nezávislosti přijat*	
Vypočtená hladina významnosti:	0.15479

(c) DETEKCE ODLEHLÝCH BODŮ:

Závěr: *Ve výběru nejsou odlehlé body*

(d) PROSTÁ MOCNINNÁ TRANSFORMACE, (e) BOX-COXOVA TRANSFORMACE:

Zvolená mocnina:	0.53
Opravený průměr:	1.5102

(f) PARAMETRY TVARU:

Šikmost:	0.4574
Špičatost:	1.9926

(g) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

Průměr:	1.7363
Směr. odchylka:	1.2830

95.0% spolehlivost: Mez spodní: 0.6636 horní: 2.8089

(h) ROBUSTNÍ ODHADY PARAMETRŮ:

Medián:		1.5450		
Směr. odchylka mediánu:		1.4215		
95.0% spolehlivost:	Mez spodní:	0.05249	horní:	3.0375

Uřezání 10% (pro P=0.10):

Průměr:		1.6778		
Směr. odchylka:		1.4696		
95.0% spolehlivost:	Mez spodní:	0.3489	horní:	3.0067

Biweight:

Průměr:		1.6791		
Směr. odchylka:		1.2340		
95.0% spolehlivost:	Mez spodní:	0.6022	horní:	2.7560

(i) ADAPTIVNÍ ODHADY PARAMETRŮ, Hoggovy odhady:

Průměr:		1.7363		
Směr. odchylka:		1.2830		
95.0% spolehlivost:	Mez spodní:	0.6636	horní:	2.8089

Poznatky z výstupu EDA:

Z průzkumové analýzy dat EDA a ověření předpokladů o výběru plyne, že rozdělení výběru pochází z Gaussova rozdělení, prvky výběru jsou nezávislé a ve výběru nejsou odlehlé body.

Lze proto užít také klasické odhady parametrů 1.74 g/l a 0.66 g/l $\leq \mu \leq$ 2.81 g/l.

Test střední hodnoty ("Test správnosti")

Na úloze *Test správnosti koncentrace vápníku* ukážeme, zda má pravdu výrobce kontrolního materiálu, když uvádí koncentraci vápníku 2.20 mmol/1. Jsou výsledky správné?

Data: Koncentrace vápníku [mmol/l]:

2.26	2.16	2.18	2.15	2.23	2.25	2.19	2.18	2.16	2.20	2.19	2.22	2.19	2.21	2.25	2.29	2.26	2.15	2.18

Řešení: Z exploratorní analýzy dat byla zjištěna mírná asymetrie, posun k nižším hodnotám, v horní části řady pořádkových statistik 3 podezřelé body. Ze základních předpokladů vyplývá, že data jsou homogenní, soubor neobsahuje odlehlé hodnoty. Data mají normální rozložení a jsou nezávislá.

Analýza jednorozměrných dat (výstup programu ADSTAT)

(a) MOCNINNÁ TRANSFORMACE: Opravený průměr: 2.2035

(b) BOX-COXOVA TRANSFORMACE: Opravený průměr: 2.2035

(c) PARAMETRY TVARU: Šikmost: 0.4433 Špičatost: 2.120

(d) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ:

Průměr: 2.2053 Směr. odchylka: 0.0414

95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1853** horní: **2.2252**

(e) ROBUSTNÍ ODHADY PARAMETRŮ:

Medián: 2.1900 Směr. odchylka mediánu: 0.0557

95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1611** horní: **2.2189**

(f) Uřezání 5% (pro P=0.05):

Průměr: 2.2036 Směr. odchylka: 0.0430

95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1827** horní: **2.2245**

(g) Uřezání 10% (pro P=0.10):

Průměr: 2.2034 Směr. odchylka: 0.04677

95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1825** horní: **2.2242**

(h) Uřezání 40% (pro P=0.40):

Průměr: 2.1947 Směr. odchylka: 0.03974

95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1705** horní: **2.2190**

(i) Biweight:

Průměr: 2.2034 Směr. odchylka: 0.04071

95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1829** horní: **2.2239**

(j) ADAPTIVNÍ ODHADY PARAMETRŮ: Hoggovy odhady:

Průměr: 2.2053 Směr. odchylka: 0.04141

95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1853** horní: **2.2252**

Závěr: Z intervalových odhadů vyplývá, že obsah vápníku 2.20 mmol/l leží v rozmezí zadané normy a **naměřené výsledky jsou správné**.

Souhrn:

Postup vyhodnocení jednorozměrných výběrů

A. Vyšetření předpokladů o datech:

A.1 Ověření nezávislosti prvků výběru.

A.2 Ověření normality.

A.3 Ověření nepřítomnosti vybočujících měření.

A.4 Ověření dostatečnosti rozsahu výběru měření n_{min}.

B. Vyčíslení odhadů a interv. spolehlivosti

B.1 Momentové charakteristiky zahrnují:

- aritmetický průměr $\bar{x}$ a jeho rozptyl $D(\bar{x})$,
- intervaly spolehlivosti,
- odhad výběrového rozptylu s^2 a jeho interv. spolehlivosti,
- průměrnou absolutní odchylku $\bar{d}$,
- variační koeficient δ s jeho rozptylem $D(\delta)$,
- vážený aritm. průměr $\bar{x}_w$ s jeho rozptylem $D(\bar{x}_w)$.

B.2 Tvarové charakteristiky - informace o tvaru rozdělení:

- koeficient šikmosti $\hat{g}_1$ s jeho rozptylem $D(\hat{g}_1)$,
- špičatosti $\hat{g}_2$ s jeho rozptylem $D(\hat{g}_2)$,
- selektorové statistiky Q_1 a Q_2,

B.3 Kvantilové a robustní charakteristiky - méně citlivé na vybočující hodnoty než momentové:

- medián $\tilde{x}_{0.5}$ s odhadem rozptylu s_M^2,
- interval spolehlivosti mediánu,
- módus,
- horní $\tilde{x}_{0.75}$ a dolní $\tilde{x}_{0.25}$ kvartil,
- interkvartilové rozpětí R,
- uřezaný průměr $\bar{x}(\vartheta)$ s winsorizovaným rozptylem $s_w(\vartheta)$,
- nesym. uřezaný průměr $\bar{x}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ se svým rozptylem s_n^2,
- selektor. kritéria: relat. délky konců Q_1 nebo relativního

sešikmení Q_2

- M-odhady s bikvadratickou funkcí: střední hodnota $\hat{\mu}_M$ s rozptylem $D(\hat{\mu}_M)$ a intervalem spolehlivosti, T_M
- pro malé rozsahy měření: pivotová polosuma P_L, pivotové rozpětí R_L, náhodná veličina T_L k intervalu spolehlivosti střední hodnoty μ.

B.4 Neparametrické odhady rozptylů - vyčíslení rozptylu odhadu libovolného parametru Θ z neznámého rozdělení:

- Odhad polohy $\hat{\Theta}_B$ a rozptylu $\hat{\sigma}_B^2$ metodou Bootstrap,
- Odhad polohy $\hat{\Theta}_J$ a rozptylu $\hat{\sigma}_J^2$ metodou Jackknife,

B.5 Maximálně věrohodné odhady parametrů pro jiná než normální rozdělení se vyčíslují podle vztahů:

a) **Poissonovo rozdělení** $\hat{\lambda}$, $D(\hat{\lambda})$ a int. spolehlivosti pro λ ,

b) **Laplaceovo rozdělení** $\hat{\Phi}$, $D(\hat{\Phi})$ a int. spolehlivosti pro Φ,

c) **rovnoměrné rozdělení** $\hat{h}$, $\hat{a}$ a jejich rozptyly $D(\hat{h})$, $D(\hat{a})$ a vztah k určení intervalu spolehlivosti,

d) **exponenciální rozdělení (jednoparametrové)** se vyčíslí $\hat{\Theta}$, $D(\hat{\Theta})$ a interval spolehlivosti pro Θ,

e) **exponenciální rozdělení (dvouparametrové)** se vyčíslí $\hat{\Theta}$, $D(\hat{\Theta})$ a nevychýlené odhady, interval spolehlivosti pro Θ,

f) **log.-normální rozdělení (dvouparam.)** $E(x)$, $D(x)$, $\hat{g}_1$, $\hat{g}_2$, δ, $\hat{x}_M$, $\tilde{x}_{0.5}$, interval spolehlivosti $\tilde{x}_{0.5}$ a δ, $\hat{M}$ a rozptyl $\hat{V}$ a jejich rozptyly $D(\hat{M})$ a $D(\hat{V})$, int. spolehlivosti M,

g) **log.-normální rozdělení (tříparam.)** $\hat{\mu}(\Theta)$ a $\sigma^2(\Theta)$.